Examen seconde session
Vibrations Ondes Magistère 2006-07

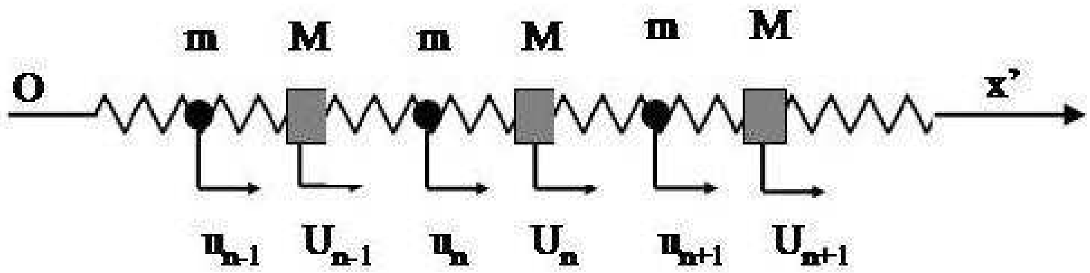
UFR de physique
Université Paris 7 Denis DIDEROT

1er juin 2007

Durée 3 heures
Documents et moyens de communication interdits.

1 Chaîne diatomique (12 points)

Une chaîne linéaire illimitée est composée d'atomes de masse m et de masse M (avec $M > m$) alternés sur un axe Ox'. Seule l'interaction entre atomes voisins, modélisée par un ressort de raideur γ et de longueur à vide $a/2$, est à prendre en considération. La pesanteur n'intervient pas, ni aucune force de frottement.
Au repos, les deux atomes de la n^{ieme} maille ont pour abscisses $x_n = n.a$ pour l'atome léger et $X_n = (n + \frac{1}{2}).a$ pour l'atome lourd.
Le schéma suivant représente cette chaîne linéaire:



1. Étude de la relation de dispersion.
   (a) Écrire le système de deux équations différentielles auxquelles satisfont les déplacements u_n et U_n des deux atomes de la n^{ieme} maille.
   (b) On cherche des solutions pour u_n et U_n sous la forme d'ondes progressives harmoniques d'équation:

$$u_n = A.exp^{i(\omega t - kna)} \quad (1)$$
$$U_n = B.exp^{i(\omega t - k(n+\frac{1}{2})a)} \quad (2)$$

   En déduire que les amplitudes A et B (différentes car $m \neq M$) sont solutions d'un système de deux équations linéaires d'inconnues A et B.
   (c) i. Établir la relation de dispersion $w(k)$ de degré 2 en $\beta = \omega^2$, que l'on trouve à partir des conditions nécessaires à l'existence de solutions non nulles pour A et B dans le système d'équations précèdent.
   ii. Après avoir estimé les solutions possibles de la relation de dispersion précédente, justifier que seules les solutions $\omega_-(k)$ et $\omega_+(k)$ (avec $\omega_- < \omega_+$) ont un sens physique en tant que pulsations.
   iii. Tracer l'allure des courbes de dispersion ω_- et ω_+ pour un intervalle judicieusement choisi[1].

[1] Pour $0 < k < \frac{\pi}{a}$, les fonctions sont monotones.

iv. Représenter sur un axe croissant en ω les domaines de pulsation des ondes progressives qui peuvent se propager dans ce réseau cristallin. Vous ferez apparaître sur cet axe les expressions des bornes des domaines en fonction de M, m et γ.

2. Précisions sur le mouvement des atomes - branches acoustique et optique.
On cherche à caractériser le mouvement des atomes correspondant à chaque branches, au voisinage de $k = 0$.

   (a) Calculer les expressions de ω_-^2 et ω_+^2 en $k = 0$.

   (b) À partir des expressions obtenues à la question précédente, exprimer le rapport A/B des amplitudes des déplacements pour les deux branches dans le cas $k = 0$, en utilisant par exemple une des équations obtenue à la question 1.b.

   (c) Conclure sur le type de mouvement (en phase, en opposition, ...) de deux atomes de la même maille pour les deux branches. Comment joue le rapport des masses m et M dans les amplitudes respectives des deux types d'atomes dans une maille ?

2 Système de flotteurs (8 points)

Rappel du principe d'Archimède :

Tout corps plongé dans un fluide crée une poussée verticale orientée vers le haut $\vec{A}$ égale en norme au poids du volume de fluide déplacé. Cette force a pour point d'application le centre de gravité G du système (voir figure 1 pour illustration).

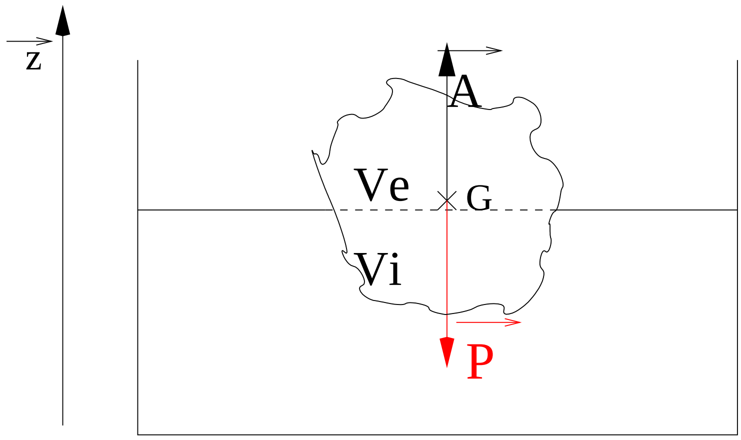


Figure 1: *Illustration du principe d'Archimède : au repos, un corps plongé dans un liquide est soumis à son propre poids et à la poussée d'Archimède* $\vec{A} = \rho_{liq}\ V_i\ g\ \ \vec{u}_z$*, où* V_i *est le volume immergé de l'objet (égal au volume de liquide déplacé) et* ρ_{liq} *la masse volumique du liquide.*

Système de flotteurs

On considère une cuve dans laquelle sont présents deux flotteurs identiques plongés dans un liquide (voir figure 2). En vertu du principe d'Archimède, si la position d'un des flotteurs est modifiée le niveau de l'eau va également être modifié. L'objectif de cet exercice est de s'intéresser à l'évolution du système lorsque les flotteurs sont déplacés. Tout mouvement horizontal sera négligé.

Note : Les trois premières questions portent sur la mise en équation du système, les trois suivantes portent sur sa résolution et la détermination du mouvement en fonction des conditions initiales. Il est donc possible de résoudre les questions 4 à 6 même en cas d'échec aux questions précédentes en prenant la forme de l'équation donnée dans la question 3.

1. En faisant un bilan des forces au repos, exprimer la masse m d'un flotteur en fonction de la masse volumique ρ du liquide et des données du problème.

2. On déplace maintenant chacun des flotteurs verticalement (on négligera dans cet exercice tout mouvement horizontal), respectivement d'une quantité algébrique z_1 et z_2.

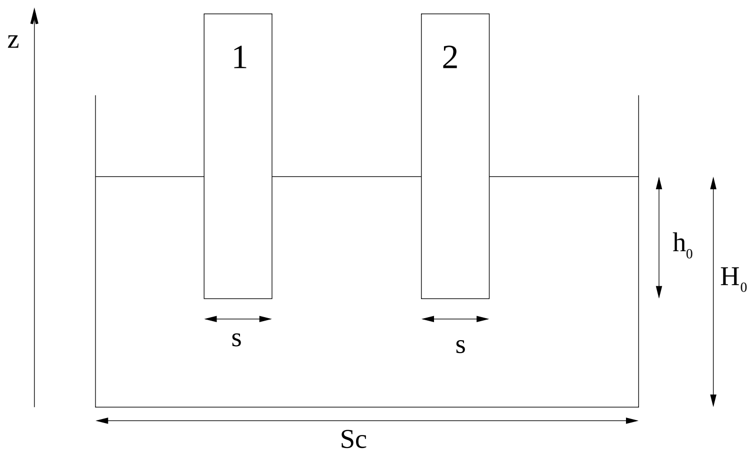


Figure 2: *Système au repos*

Le mouvement de l'eau varie dans le même temps d'une quantité algébrique z. On recherche la relation entre z, z_1 et z_2 sous la forme $z = \alpha \cdot z_1 + \beta \cdot z_2$.

(a) Que peut-on prédire avant tout calcul des valeurs relatives de α et β ? Pourquoi ?

(b) Si z_1 et z_2 ont le même signe, que peut-on dire du signe de z ? Que peut-on en déduire pour α et β ?

(c) Déterminer les valeurs α et β, et vérifier la cohérence de l'expression liant z à z_1 et z_2 avec vos réponses aux questions a) et b).

Il est possible de faire la question 3 si vous avez réussi les questions 2a) et 2b). Si vous n'avez pas fait ces questions, les questions 4 à 6 peuvent être faites en prenant la forme de l'équation donnée dans la question 3.

3. Montrer que l'équation du mouvement du flotteur 1 peut se mettre sous la forme

$$\ddot{z_1} + \omega_0^2 \, z_1 + \mu \, z_2 = 0$$

On précisera ω_0 et μ en fonction des données du problème.

4. En déduire le système d'équations couplées et l'écrire sous forme matricielle.

5. On considère dans la suite les solutions particulières

$$z_1 = \mathcal{R}e\{\underline{z_1} \, e^{i\omega t}\}$$

et

$$z_2 = \mathcal{R}e\{\underline{z_2} \, e^{i\omega t}\}$$

Déterminer les modes propres du système et les décrire physiquement (comportement des flotteurs et niveau de l'eau).

6. A $t < 0$, les flotteurs sont maintenus dans des positions respectives z_{10} et z_{20}; ils sont lâchés à t = 0. Exprimer les positions des deux flotteurs en fonction du temps $z_1(t)$ et $z_2(t)$.