Examen
Vibrations Ondes Magistère 2006-07

UFR de physique
Université Paris 7 Denis DIDEROT

8 Janvier 2007

Documents et moyens de communication interdits.
Durée de l'épreuve : $4H$.

1 Oscillateurs couplés

(7 points) Vous allez étudier les petites oscillations d'un système à plusieurs degrés de liberté au voisinage de sa position d'équilibre. Il s'agit *in fine* d'obtenir les modes normaux d'oscillations. Le système est un cylindre creux (S) de masse m suspendu à un support horizontal (axe Δ) par des fils inextensibles de longueurs égales fixées à ses extrémités. Les fils sont attachés sur la circonférence de (S), comme indiqué sur la figure 1, de telle sorte qu'il puisse se balancer et tourner sur lui-même. Le problème est restreint à l'étude du mouvement effectué par (S) uniquement lorsque les fils ont le même angle $\theta = \theta_1 = \theta_2$ par rapport à la verticale. Une vue de coté est représentée sur la figure 1. Pour des questions de simplicité la longueur l des fils est $l = 3a$ et le rayon r du cylindre est $r = 2a$.
L'utilisation des équations de Lagrange est proposée mais libre à vous d'utiliser la méthode de votre choix afin de déterminer les modes propres d'oscillation.

1. Coordonnées (généralisées).
   (a) i. En toutes généralités (en dehors du cas où les fils ont les deux mêmes angles par rapport à la verticale), combien de degrés de liberté possède ce système ?
   ii. Donnez quelques jeux possibles de groupes de coordonnées.
   (b) Si l'on se restreint au cas cité dans l'introduction, montrez que les angles θ et ϕ suffisent à décrire le système.
2. Détermination de l'énergie cinétique du cylindre : T.
   (a) i. Déterminer sans approximation l'expression de l'énergie cinétique de translation de (S).
   ii. Dans le cadre des petits angles, montrez que l'énergie cinétique de translation, à l'ordre le plus bas, se réduit a :
$$T_l = \frac{1}{2} m a^2 (3\dot{\theta} + 2\dot{\phi})^2 \tag{1}$$
   (b) Soit I le moment d'inertie de (S) par rapport à son axe de symétrie (on rappelle que $I = mr^2 = 4ma^2$), quelle est l'expression de l'énergie cinétique de rotation T_r de (S) sur lui même ?
   (c) En déduire l'énergie cinétique totale T.
3. Énergie potentielle : V.
   (a) En prenant la position la plus basse de G comme référence de l'énergie potentielle, donner l'expression exacte de cette énergie.
   (b) Montrer qu'à l'ordre le plus bas, l'énergie potentielle s'écrit :
$$V = \frac{mg}{2}(3a\theta^2 + 2a\phi^2) \tag{2}$$
4. Équations du mouvement.
   (a) Déduire des questions 2 et 3 l'expression du Lagrangien L.

(b) Rappeler l'expression générale des équations de Lagrange (ou, ici, d'Euler-Lagrange).

(c) Déterminer les équations du mouvement (E).

5. Détermination des modes normaux d'oscillation. On rappelle que lorsque le système est dans un mode normal, tous les éléments qui le composent oscillent à la même pulsation ω. On adopte la notation complexe : $\theta(t) = Ae^{i\omega t}$ et $\phi(t) = Be^{i\omega t}$.

   (a) Exprimer le système d'équations couplées (E) en fonction de θ, ϕ et $\lambda = a\omega^2/g$.

   (b) Déterminer les pulsations propres ω_i, puis les modes propres associés, $\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$

   (c) Représentez schématiquement chacun des mouvements associés à ces modes propres.

   (d) Donner l'expression générale de $\theta\ (t)$ et $\phi\ (t)$ comme une superposition des modes propres précédents.

   (e) En déduire la forme réelle des solutions.

6. Si les angles que forment les fils avec la verticale ne sont plus égaux, d'autres modes d'oscillations apparaissent.
   Dessiner les.

2 Câble coaxial

(13 points) Un câble coaxial a une structure représentée sur la figure 2. L'isolant qui sépare les deux conducteurs va engendrer un effet de type capacitif, alors que la tresse un effet de type inductif. Nous allons d'abord modéliser ce câble comme une chaîne linéaire infinie constituée d'éléments discrets de tailles finies couplés en plus proches voisins, puis, par passage à la limite, nous étudierons la propagation et la réflexion d'ondes planes monochromatiques harmoniques. Enfin, il sera suggéré d'établir les analogies entre électrocinétique et acoustique.

1. Équation des télégraphistes pour une chaîne infinie.

   On modélise le câble comme une ligne de transmission constituée d'éléments discrets identiques de numéro n appelés *cellules*, séparées d'un pas a (l'origine est arbitraire) selon le schéma de la figure 3.

   Les éléments constitutifs de la cellule n sont : λ une self-inductance, R une résistance, γ une capacité et g une perditance. En effet, l'isolant peut ne pas être parfait et g, qui a pour dimension l'inverse d'une résistance, permet de relier courant de fuite et tension par $I_f = gU$. On peut aussi décrire ces pertes en se référant à une résistance de fuite, $1/g$. On note I_n l'intensité du courant et e_n la différence de potentiel entre les deux conducteurs aux bornes du condensateur.

   (a) En considérant le courant I_n circulant dans la résistance R et l'inductance λ de la cellule n, déterminer une relation entre $e_{n-1} - e_n$, $\frac{dI_n}{dt}$ et I_n.

   (b) En considérant cette fois la tension e_n aux bornes de la capacité γ en parallèle avec la résistance de fuite, déterminer une relation entre $I_n - I_{n+1}$, ge_n et $\frac{d\ e_n}{dt}$.

(c) En déduire que l'intensité I_n suit l'équation suivante :

$$\gamma\lambda\frac{d^2I_n}{dt^2}+(\gamma R+g\lambda)\frac{dI_n}{dt}+gRI_n=I_{n-1}-2I_n+I_{n+1} \quad (3)$$

Cette relation est appelée `ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES` pour l'intensité.

(d) Quelle est celle pour la tension e_n ?

2. On se place dans le cas d'une chaîne infinie sans perte ($R=0$, $g=0$), on pose $\omega_0^2=\frac{1}{\gamma\ \lambda}$.
   (a) Que devient l'équation (3) ? Et celle obtenue pour la tension ?
   (b) On cherche un ensemble de solutions sous la forme d'ondes progressives sinusoïdales de pulsation ω et de "vecteur" d'onde k, soit : $I_n=Ae^{i(kna-\omega t)}$, où ω est réelle positive, k est réel et A une amplitude quelconque non nulle.
      i. Quelle relation de dispersion doit vérifier $\omega(k)$? Tracer la courbe $\omega=f(k)$, et expliquer pourquoi on peut se limiter à un intervalle fini de valeurs de k sans enlever de généralité aux solutions obtenues ?
      ii. Déterminer les vitesses de phase v_ϕ et de groupe v_g. Pour quelle valeur de k, v_g est-elle maximale ?
      iii. Utiliser tous les arguments, y compris quantitatifs, qui expliquer pourquoi on ne peut utiliser ce type de montage "macroscopique" pour transporter des signaux électromagnétiques[1] de haute fréquence ($f\approx\ 1\ Ghz$) ?
3. On s'intéresse aux modes propres en intensité et en tension d'une chaîne finie de N éléments de pas a, toujours dans l'hypothèse d'une chaîne sans perte.
   (a) Cas où la chaîne est ouverte aux deux extrémités (voir Fig. 4).
      i. Montrer que l'on peut écrire, pour $n=1,...,N$, les solutions $I_n(t)$ sous la forme :

$$I_n(t)=\Re e\{(Ae^{ikna}+Be^{-ikna})e^{-i\omega\ t}\} \quad (4)$$

      ii. Interpréter l'origine et la signification physique de ces deux termes.
      iii. Donner, sans démonstration, la forme des solutions de l'équation des télégraphistes en tension.
      iv. Quelles sont les conditions aux limites pour l'intensité et la tension ?
      v. En déduire une relation entre A et B ainsi que les valeurs de ka possibles.
      vi. Discuter des positions relatives des "ventres" et des "nœuds" pour l'intensité et la tension. Interpréter.
   (b) Reprendre la question (a) dans l'hypothèse où la chaîne est en court-circuit à ses deux extrémités (voir Fig. 4 en tenant compte cette fois des pointillés).[2]
   (c) Idem lorsque la chaîne est refermée sur elle-même. Discuter.

[1] On rappelle que la vitesse de la lumière est de $3.10^8\ m/s$.
[2] Ajouter à chaque extrémité de la ligne des couples $(I_{-1},\ e_{-1})$ et $(I_{N+1},\ e_{N+1})$.

4. On se place maintenant dans le cas d'une ligne en tenant compte des pertes. Dans un premier temps vous allez passer en approximation continue, puis vous intéressez à l'amortissement, le long de la ligne, d'une onde créée en $x = 0$ par un générateur de tension sinusoïdale.
   (a) On pose $\Lambda = \lambda/a$ la self par unité de longueur, $\Pi = R/a$ la résistance par unité de longueur, $\Gamma = \gamma/a$ la capacité par unité de longueur et $G = g/a$ la perditance par unité de longueur[3]. Le courant $I_n(t)$ devient $I(x,t)$ et la tension $e_n(t)$ devient $e(x,t)$.
      i. Montrez que dans l'approximation continue, les relations obtenues en 1.a et 1.b s'écrivent :
$$-\frac{\partial e}{\partial x} = \Pi I + \Lambda \frac{\partial I}{\partial t} \tag{5}$$
$$-\frac{\partial I}{\partial x} = Ge + \Gamma \frac{\partial e}{\partial t} \tag{6}$$
      ii. En déduire l'équation des télégraphistes en courant dans le cadre de l'approximation continue.
   (b) Vous allez chercher des solutions de l'équation des télégraphistes obtenue en 4.(a)ii. sous la forme : $I = Y(x).e^{iwt}$.
      i. Déterminer α^2 tel que les solutions de l'équation différentielle en x puissent s'écrire sous la forme :
$$Y = Ae^{-\alpha x} + Be^{+\alpha x} \tag{7}$$
      ii. Poser $\alpha = q + i\beta$ puis déterminer les expressions de q et β en fonction des données du problème. Discuter de la forme des solutions Eq. 7 obtenues et interpréter physiquement q et β.
      iii. Déterminer l'expression de la tension $e(x,t)$ en fonction des solutions trouvées précédemment.
      iv. On suppose que les termes de pertes sont faibles.
         α) Trouvez, par développements limités à l'ordre deux en Π et G, les expressions de q et β^2.
         β) Que représente la grandeur ω/β ?
      v. On impose en extrémité de ligne un courant $I(t) = I_0 e^{i\Omega t}$. Quelle condition sur la longueur de ligne L doit on retenir afin de pouvoir négliger le terme $Be^{+\alpha x}$ dans l'expression de $Y(x)$?
      vi. Cette condition remplie :
         α) Que vaut le rapport $Q = e/I$? Que représente-t-il ?
         β) Trouvez la condition entre Π, G, Λ et Γ afin que Q soit indépendant de ω.
5. En utilisant des analogies entre acoustique et électrocinétique à une dimension, résumer, en quelques phrases, les diverses situations que vous avez rencontrées dans les questions précédentes dans la "langue" des acousticiens.

[3] Qui n'est rien d'autre qu'une conductance.

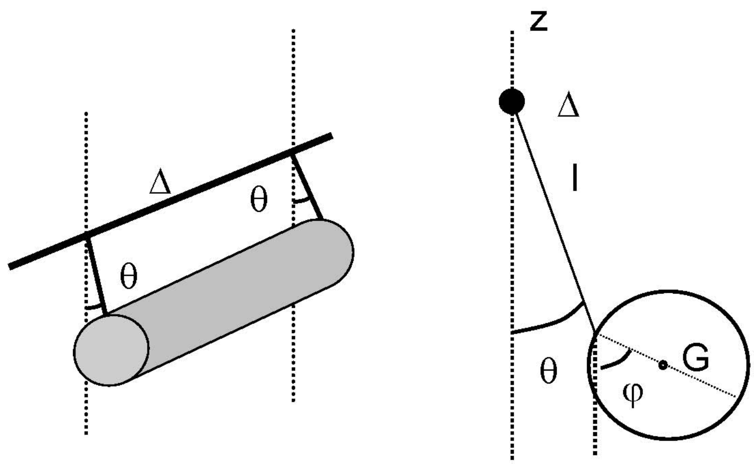

Fig. 1 – Représentation schématique du cylindre creux (S) de rayon r. Les fils de longueur l sont inextensibles et fixés à l'axe Δ. On suppose que ces fils forment le même angle θ avec la verticale. La figure de droite est une vue de la face avant de S. Le point G est la projection du centre de gravité de S sur cette face. L'angle ϕ repère la rotation de S sur lui même.

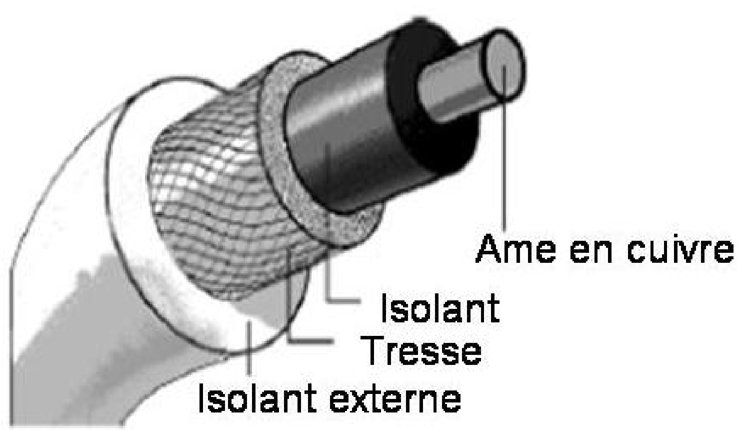

Fig. 2 – Représentation schématique d'un câble coaxial. Du centre vers l'extérieur on a successivement : une âme centrale en cuivre, un premier isolant (si possible non-magnétique), une tresse cylindrique servant de cage de Faraday, un second isolant.

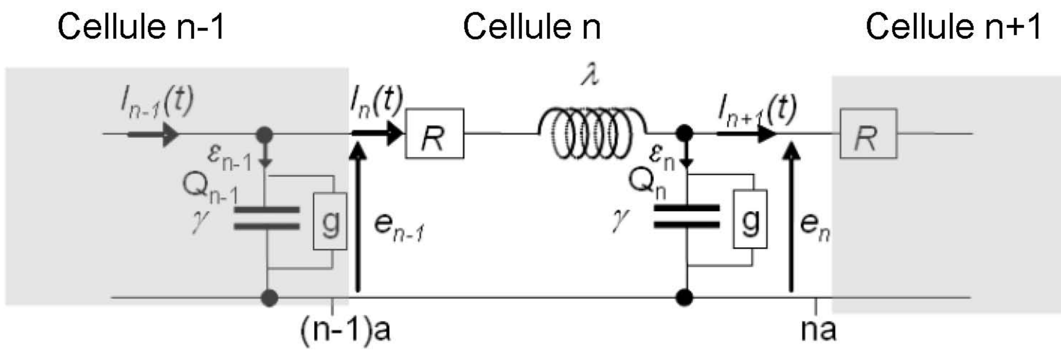

FIG. 3 – Représentation schématique de la cellule n en interaction avec les cellules $n-1$ et $n+1$. Pour vous aidez à répondre aux questions, vous pouvez vous appuyez sur les grandeurs intermédiaires, Q_n, charge du condensateur n, et ϵ_n, somme des intensités circulant dans la résistance de fuite, $1/g$, et la capacité γ.

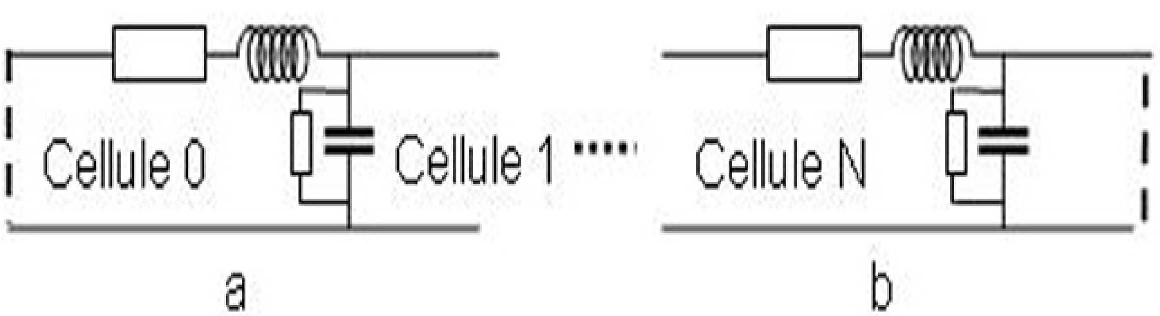

FIG. 4 – Extrémité gauche a), et droite b) de la chaîne ouverte constituée de N cellules. En pointillés, réalisation d'un court circuit.