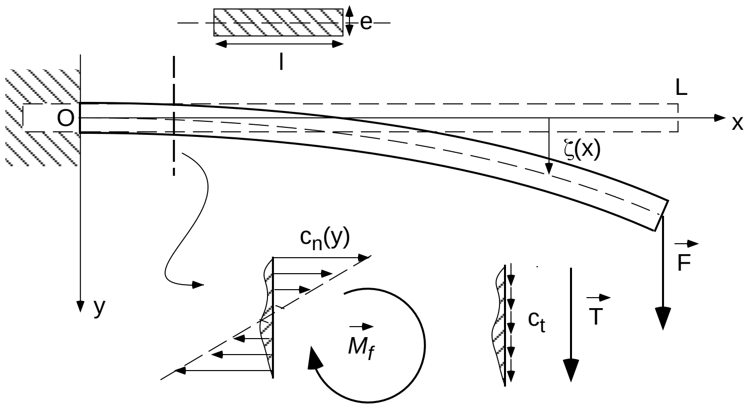

Figure 26: Flexion d'une poutre de section rectangulaire $l \times e$ encastrée en O et chargée ponctuellement en $x = L$; on néglige son poids devant la force F.

les symétries de la barre sont telles que la variable z n'intervient pas dans le problème et que, par ailleurs, les contraintes sont nulles sur toute section perpendiculaire à Oz (i.e. opérer *réellement* une telle coupe ne changera rien aux déformations). Pour fixer les idées, on choisit une "poutre" (*beam*) de section rectangulaire, de largeur l suivant Oz et d'épaisseur $e \ll L$ suivant Oy (Fig. 26). Cette poutre est encastrée à une extrémité (*cantilever beam*). On exerce une force $\vec{F} = F\vec{e}_y$ au niveau de l'extrémité libre qui se déplace de Δ. On se pose les questions suivantes :

- Quelle est la relation entre F et Δ ?
- Quelle est plus généralement la forme de la poutre chargée ?
- Quelles sont les contraintes et les déformations de la poutre ?

Pour y-répondre, nous allons suivre une démarche semblable à celle qui nous a permis d'étudier le ressort hélicoïdal.

Actions internes — Étudions d'abord la poutre à l'équilibre dans son ensemble. Elle est soumise à $\vec{F}$ ainsi qu'aux actions dues à l'encastrement, qui se réduisent à la résultante $\vec{R}$ et au moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ calculé en O. L'équilibre impose :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{R} & = & -\vec{F} \\ \vec{\mathcal{M}}_O & = & -FL\vec{e}_z \end{array} \right.$$

Coupons maintenant la poutre par un plan $x = x_0$ et ne gardons que la partie $x < x_0$. L'action de la partie ôtée se réduit à une force $\vec{T}(x)$ appelée "effort tranchant" et à un moment calculé en O, $\vec{\mathcal{M}}_f(x)$ dit "moment fléchissant". L'équilibre du sous-système impose :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{T}(x) + \vec{R} & = & \vec{0} \\ \mathcal{M}_f(x) + \mathcal{M}_O + xT & = & 0 \end{array} \right.$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T(x) & = & F \\ M_f(x) & = & (L-x)F \end{array} \right.$$

L'effort tranchant T est tangent à la coupe $\mathcal{S}_x$ et résulte donc d'une distribution de contraintes de cisaillement c_t telle que :

$$\iint_{\mathcal{S}_x} dydz\, c_t(y) = T$$

Ces contraintes contribuent au moment fléchissant mais elles ne sont pas seules : une distribution de contraintes normales c_n peut également donner un moment suivant Oz. On verra qu'en fait, celles-ci sont dominantes pour une poutre allongée ($L \gg l$) et que, par conséquent :

$$\mathcal{M}_f \simeq -\iint_{\mathcal{S}_x} dydz\, y \times c_n(y) \tag{35}$$

On se convaincra que le signe est correct *compte-tenu des conventions adoptées ici.*

Notons que l'absence de force interne parallèle à l'axe Ox impose :

$$\iint_{\mathcal{S}_x} dydz\, c_n(y) = 0 \tag{36}$$

Fléchissement de la poutre, fibre neutre — On considère une portion élémentaire de poutre comprise initialement entre les sections $\mathcal{S}_x$ et $\mathcal{S}_{x+dx}$. On appelle fléchissement une déformation lors de laquelle les sections restent planes mais forment un dièdre d'angle $d\theta$ (Fig. 27). On décrit la poutre fléchie par son rayon de courbure ρ, compté positivement pour une concavitée tournée vers les $y > 0$. Plus précisément, $\rho(x)$ est le rayon de courbure en x d'une section initialement située dans le plan $y = y_0$. Pour le moment y_0 est arbitraire[5]. Le rayon de courbure d'une fibre située en y est donc $\rho + y_0 - y$ avec nos conventions de signes.

Les bouts de fibres constituant la portion de poutre sont plus ou moins étirés ou comprimés lors de la flexion. Il existe nécessairement une fibre dont la longueur reste inchangée. Dans le cas contraire la poutre serait globalement étirée, en contradiction avec l'absence de tension interne le long de l'axe. Choisissons y_0 correspondant à la hauteur de cette "fibre neutre". La longueur d'un fibre prise à y est alors : $dx'(y) = (\rho + y_0 - y)d\theta$ tandis que $dx'(y_0) = dx = \rho d\theta$ d'où :

$$dx'(y) = dx\left(1 + \frac{y_0 - y}{\rho(x)}\right)$$

Les fibres $y < y_0$ sont donc étirées et celles $y > y_0$ comprimées. L'allongement relatif du bout de fibre est donc :

$$a_n(y) = \frac{dx'(y) - dx}{dx} = \frac{y_0 - y}{\rho(x)}$$

[5] On appelle "fibre" tout segment parallèle à l'axe de la poutre. La dimension Oz n'intervenant pas dans le problème posé, on identifie souvent la section $y = y_0$ et une quelconque de ses fibres.

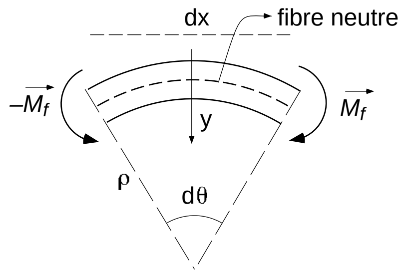

Figure 27: Flexion d'un élément de poutre infinitésimal. Les surfaces de coupe restent planes. La "fibre neutre" conserve sa longueur initiale dx. Le rayon de courbure de cette fibre est $\rho = dx/d\theta$.

et la contrainte associée est d'après la loi de Hooke :

$$c_n(y) = E\,\frac{y_0 - y}{\rho(x)}$$

Comment déterminer y_0 ? Il suffit d'écrire la nullité de la résultante des contraintes normales (eq. (36)) : TD 6.1

$$\iint_{\mathcal{S}_x} dydz\,(y_0 - y) = 0$$

y_0 ne dépend donc que de la forme de la section $\mathcal{S}_x$. Pour notre section rectangulaire, on trouve que la fibre neutre passe par le milieu de la poutre. Quoi qu'il en soit, une fois déterminé la position de cette fibre neutre, on choisit $y_0 = 0$ par simple translation du système de coordonnées. On a alors avec ce choix simplificateur :

$$c_n(x, y) = -E\,\frac{y}{\rho(x)} \qquad (37)$$

Moment I_z de la poutre — On peut faire intervenir le moment fléchissant grâce à l'eq. (35). On obtient alors :

$$\mathcal{M}_f(x) = \frac{E\,I_z}{\rho(x)} \qquad (38)$$

où I_z, caractéristique géométrique de la poutre, est défini pour une section quelconque par : TD 6.1

$$I_z = \iint_{\mathcal{S}_x} dydz\,y^2 \qquad (39)$$

NB. Comme dans le cas de la torsion et du "moment" I_0 (eq. (34)), on appelle un peu abusivement cette intégrale moment (d'inertie) de la poutre par rapport à l'axe Oz.

Dans le cas d'une poutre de section rectangulaire :

$$I_z = \frac{l\,e^3}{12}$$

Dans le cas d'une poutre de section circulaire de rayon R, on obtient facilement I_z en exploitant les symétries et en remarquant que $I_z = I_y = I_0/2 = \pi R^4/4$

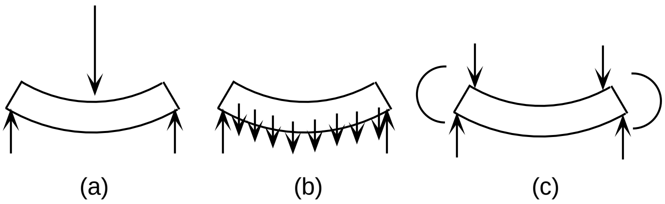

Figure 28: Quelques modes de chargement d'une poutre. (a) flexion en trois points sous l'action de trois forces discrètes. (b) Poutre pesante sur deux appuis simples — le poids est une force répartie ; les deux appuis sont discrets. (c) Flexion en quatre points ; les deux paires de forces résultent en deux couples opposés appliqués aux extrémités de la poutre.

Forme de la poutre encastrée — Les relations obtenues à ce niveau (37, 38) ne dépendant pas du mode de chargement. Il manque une équation pour boucler le problème. Il s'agit cette fois de la distribution de moment fléchissant le long de la poutre qui dépend bien sûr du problème considéré (quelques exemples de chargement sont illustrés sur la Fig. 28). Pour la poutre encastrée :

$$\mathcal{M}_f(x) = F(L - x) \tag{40}$$

d'où on tire le rayon de courbure :

$$\rho(x) = \frac{E\,I_z}{F(L-x)}$$

Nous sommes alors en mesure de déterminer la forme $y = \zeta(x)$ de la poutre chargée. Il suffit pour cela de rappeler que :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\zeta''}{(1+\zeta'^2)^{3/2}} \simeq \frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

l'approximation étant légitime pour des profils peu courbés. La forme de la poutre est donc solution de :

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{F}{E\,I_z}(L-x)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \zeta(0) & = & 0 \\ \zeta'(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites au niveau de l'encastrement sont bien au nombre de deux pour une équation différentielle d'ordre deux. On trouve après intégration :

$$\zeta(x) = \frac{F}{E\,I_z}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

D'où la relation linéaire $F = K\Delta$ entre la force et le déplacement $\Delta = \zeta(L)$, la raideur K étant donnée par :

$$K = \frac{3EI_z}{L^3} = \frac{El}{4}\left(\frac{e}{L}\right)^3$$

NB. Le rayon de courbure ρ est minimal en $x = 0$. La déformation maximale est donc :

$$a_n^{max} = \frac{FL}{2EI_z} = \frac{3}{2}\frac{\Delta}{L}\frac{e}{L}$$

autrement dit, pour une même (petite) déformation maximale, le déplacement Δ obtenu ici est amplifié d'un facteur de l'ordre de $L/e \gg 1$ par rapport au déplacement $a_n^{max}L$ de l'extrémité la poutre en chargement axial.

État de contrainte dans la poutre — Notons en premier lieu que $|c_n|$ est maximal, pour la poutre encastrée, justement au niveau de l'encastrement, en $y = \pm e/2$. C'est donc en ces points que le matériau risque de se détériorer.

Revenons sur les contraintes de cisaillement c_t. On a

$$c_t = \frac{F}{el}$$

à comparer à

$$c_n \sim \frac{F}{el}\frac{L}{e} \gg c_t$$

et les contraintes de cisaillement sont bien négligeables, comme annoncé. Notons cependant que c_t agit également sur les coupes normales à Oy. Dans le cas de poutres formées de véritables fibres ou de feuilles collées entre elles (bois contreplaqué par exemple), ce cisaillement risque d'entraîner leur décollement et de provoquer la déterioration de la poutre.

Certains matériaux ont un comportement très disymétrique vis-à-vis de la traction/compression. En particulier, le béton résiste très mal à la traction et se fracture. Le fléchissement d'une poutre en béton est donc problématique puisque l'extrado de la poutre est sous tension. Une solution consiste à "précontraindre" le matériau en lui appliquant une contrainte axiale $c_0 < 0$ uniforme dans toute section perpendiculaire à Ox. *Comme les équations de Hooke sont linéaires on peut superposer les solutions* résultant de la précontrainte et de la flexion. La contrainte normale devient alors $c_n(x, y) = c_0 - Ey/\rho$ qui peut être rendue partout compressive ($c_n < 0$) pour $|c_0|$ assez élevée.

Comprimer une poutre suivant son grand axe n'est cependant pas sans inconvénient potentiel, comme le montre le paragraphe suivant.

Flambage d'une poutre (*buckling*) — Considérons une poutre d'axe Ox chargée axialement à ses extrémités par deux forces $\pm\vec{F}\vec{e}_x$ à l'exclusion de toute autre action. Le problème n'a *a priori* rien à voir avec la flexion. L'expérience, facilement réalisable avec un spaghetti (cru), nous montre cependant qu'il est facile de fléchir une telle poutre élancée sous la simple compression axiale. C'est le flambage qui n'a lieu que pour une force F supérieure à une valeur "critique" F_c. Nous allons calculer cette valeur en montrant que en dessous de cette valeur la solution fléchie ne peut pas exister. Supposons la poutre fléchie[6], et notons $\zeta(x)$ sa forme (Fig. 29). Effectuons une coupe en x et ne gardons que le sous-système constitué des $x < 0$. En écrivant les conditions d'équilibre on trouve que les actions internes en x se réduisent à :

[6] Notons que la symétrie du problème autour de Ox ne privilégie aucun plan axial et que le choix du plan et du sens de flexion est arbitraire, en pratique déterminé par les imperfections même minimes de la poutre ou du chargement. On dit qu'il y a "brisure spontanée de symétrie"

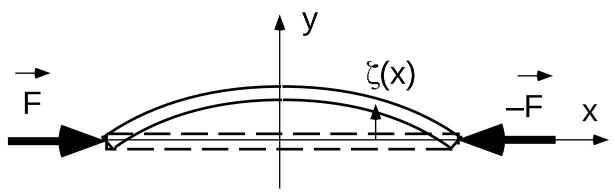

Figure 29: Géométrie de flambage d'une poutre chargée axialement à ses extrémités libres.

- une force axiale égale à $F\vec{e}_x$
- un effort tranchant nul
- un moment fléchissant $\vec{\mathcal{M}}_f = -F\zeta(x)\vec{e}_z$

Le rayon de courbure $\rho(x)$ est ici défini par

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

négatif dans le cas représenté sur la figure 29. L'équation (38) s'écrit ici :

$$EI_z \frac{d^2\zeta}{dx^2} = -F\zeta(x)$$

(on se persuadera que les signes sont corrects) qui admet des solutions de la forme :

$$\zeta(x) = A\,\cos(kx) + B\,\sin(kx)$$

avec :

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI_z}}$$

Compte-tenu des conditions aux limites $\zeta(\pm L/2) = 0$, A et B doivent être solution du système linéaire homogène suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A\cos(kL/2) - B\sin(kL/2) & = & 0 \\ A\cos(kL/2) + B\sin(kL/2) & = & 0 \end{array} \right.$$

qui n'admet de solutions non-triviales que si

$$\left| \begin{array}{cc} \cos(kL/2) & -\sin(kL/2) \\ \cos(kL/2) & +\sin(kL/2) \end{array} \right| = 0$$

Ce déterminant vaut $\sin(kL)$ et sa nullité suppose que $kL = p\pi$ avec p entier. Cette "quantification" de k équivaut à une quantification de f :

$$F = p^2\pi^2\frac{EI_z}{L^2}$$

Comme $p \geq 1$, une solution fléchie ne peut pas exister tant que $F < F_c$ avec

$$F_c = \pi^2\frac{EI_z}{L^2}$$

On notera que ce seuil de flambage est d'autant plus bas que le rapport d'aspect de la poutre est plus grand. Il est donc dangereux de construire des piliers de pont trop élancés. Pour une poutre cylindrique de révolution, $I_z = \pi R^4/4$ et la *contrainte* critique vaut :

$$c_c = \frac{F_c}{\pi R^2} = E\left(\frac{\pi R}{2L}\right)^2$$

2.3 Loi de Hooke généralisée — tenseurs des contraintes et des déformations

Les problèmes traités jusqu'à présent concernent des corps aux formes simples, soumis à des actions extérieures respectant leurs symétries. Ces situations canoniques se résolvent "avec les mains" à partir des lois de Hooke empiriques. Pour aller au delà il est nécessaire de se doter d'outils et de méthodes systématiques permettant d'écrire l'équilibre mécanique d'une système quelconque.

2.3.1 Tenseur des contraintes

On a jusqu'à présent travaillé avec le *vecteur* contrainte $\vec{c}$ défini comme la force par unité d'aire exercée au voisinage d'une surface élémentaire par les particules extérieures sur les particules intérieures. Cette définition, pour être non-ambigüe, suppose qu'on oriente la surface par sa normale $\vec{n}$ pointant par convention vers l'extérieur[7]. La contrainte est alors non seulement fonction de la position $\vec{r}$ mais également de la normale $\vec{n}$ de la surface élémentaire :

$$\vec{c} = \vec{c}(\vec{r},\, \vec{n})$$

En particulier, si on permute le rôle de l'intérieur et de l'extérieur, i.e. si on transforme $\vec{n}$ en $-\vec{n}$, on doit avoir, en vertu du principe d'action-réaction :

$$\vec{c}(\vec{r},\, -\vec{n}) = -\vec{c}(\vec{r},\, \vec{n})$$

Considérons maintenant l'équilibre d'une petit tétrahèdre de matière, de volume $\mathcal{V}$ convenablement orienté par rapport aux vecteurs de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (Fig.30). Les trois faces "basales" ont pour normales $-\vec{e}_1$, $-\vec{e}_2$ et $-\vec{e}_3$ tandis que la face inclinée a pour normale $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$.

En faisant intervenir les aires des facettes, l'équilibre su système s'écrit : $\vec{c}(\vec{n})\mathcal{S} + \vec{c}(-\vec{e}_1)\mathcal{S}_1 + \vec{c}(-\vec{e}_2)\mathcal{S}_2 + \vec{c}(-\vec{e}_3)\mathcal{S}_3 + \vec{\phi}\mathcal{V} = 0$ où $\vec{\phi}$ est une éventuelle force volumique[8].

Deux remarques vont nous permettre de mettre en évidence une caractéristique essentielle du champ de contrainte :

1. La taille du tétrahèdre est choisie suffisamment petite devant l'échelle de variation des champs pour qu'on puisse considérer les contraintes comme uniformes sur chaques faces (on ne mentionne plus $\vec{r}$ en conséquence). Si maintenant on opère une homothétie de rapport $\lambda < 1$ sur le tétrahèdre, les

[7] Cela suppose également qu'on ne considère que des interactions à suffisamment courte portée pour seules les particules au voisinage immédiat de la surface soient concernées.

[8] i.e. correspondant à des interactions à longue portée.

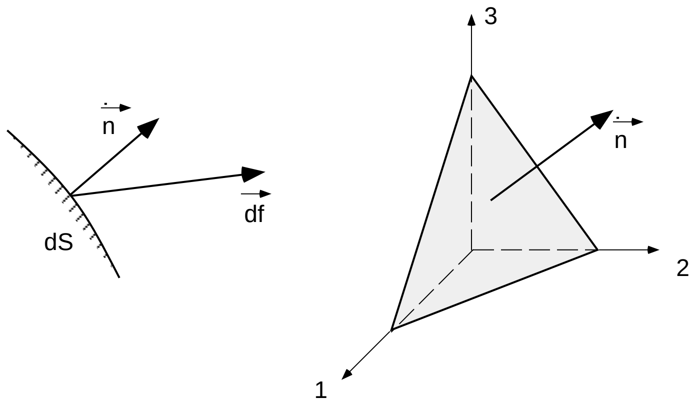

Figure 30:

forces surfaciques seront multipliéees par λ^2 tandisque le terme volumique le sera par λ^3. Lorsque $\lambda \to 0$, par conséquent, le terme volumique devient négligeable. On supposera que cela est vrai bien avant que les dimensions du tétrahèdre deviennent d'ordre atomique, si bien qu'on reste dans le domaine continu.

2. Les coefficientes directeurs de $\vec{n}$ s'identifient à $n_i = \mathcal{S}_i/\mathcal{S}$ pour $i = 1, 2, 3$.

En tenant compte de ces remarques et de la symétrie de $\vec{c}(\vec{n})$ on obtient alors :

$$\vec{c}(n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3) = n_1\vec{c}(\vec{e}_1) + n_2\vec{c}(\vec{e}_2) + n_3\vec{c}(\vec{e}_3) \;\; \forall(n_1, n_2, n_3)$$

On a donc montré que la relation qui lie $\vec{n}$ et $\vec{c}$ est *linéaire*. On note $\overleftrightarrow{\sigma}$ cette application $\vec{n} \to \vec{c} = \overleftrightarrow{\sigma}.\vec{n}$, appellée *tenseur des contraintes*. Une fois choisie une base, on représentera ce tenseur par une matrice 3×3 dont chacun des 9 coefficients est un champ scalaire $\sigma_{ij}(\vec{r})$ ayant la dimension d'une force par unité d'aire. On peut alors écrire la relation fondamentale :

$$c_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\, n_j \quad (\text{“}c_i \widehat{=} \sigma_{ij}\, n_j\text{”}) \tag{41}$$

L'expression entre parenthèses est une notation conventionnelle dite d'Einstein, supposant la sommation implicite sur les indices répétés (ici “j”).

Considérons cette fois une petit cube d'arètes de longueur a parallèles aux vecteurs d'une base orthonormée. En appliquant la relation (41) aux 6 faces de normales $\pm\vec{e}_1 \ldots$, on peut exprimer les composantes des vecteurs contrainte sur ces faces en fonction des composantes du tenseur des contraintes (Fig. 31). On vérifie bien que la résultante des forces de surface est bien automatiquement nulle. L'équilibre mécanique suppose également que leur moment résultant, exprimé par exemple au centre du cube, est nul[9]. Ce moment est :

$$\vec{\mathcal{M}} = (\sigma_{32} - \sigma_{23})a^3\vec{e}_1 + (\sigma_{13} - \sigma_{31})a^3\vec{e}_2 + (\sigma_{21} - \sigma_{12})a^3\vec{e}_3$$

[9]En raisonnant comme précédemment, on montrerait que la contribution au moment total des forces volumiques est négligeable pour un cube assez petit.

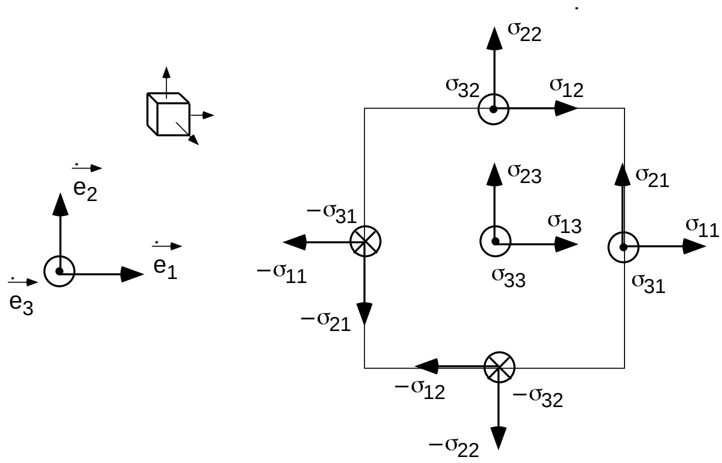

Figure 31:

si bien qu'on déduit la propriété importante :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{42}$$

i.e. *le tenseur des contraintes est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée.* Par conséquent, il n'y a que 6 composantes indépendantes du tenseur des contraintes, 3 diagonales et 3 non-diagonales.

Notons enfin que les termes diagonaux correspondent à des contraintes de traction/compression tandis que les termes non-diagonaux correspondent à des contraintes de cisaillement (Fig. 31). Un cube orienté suivant les vecteurs propres du tenseur des contraintes ne subit donc que des tractions/compressions sur ses faces.

Un cas particulier est celui d'un champ de pression hydrostatique P pour lequel $\overleftrightarrow{\sigma} = -P\overleftrightarrow{1}$, le signe moins provenant de la convention $P > 0$ en compression. Le tenseur est donc ici diagonal dans toute base orthonormée.

Condition déquilibre dans une champ de contrainte non-uniforme — Considérons un volume $\mathcal{V}$ de matière limité par une surface fermée $\mathcal{S}$. Notons $\vec{\mathcal{R}}$ la résultante des forces de surface. On a, par définition du tenseur des contraintes :

$$\vec{\mathcal{R}} = \iint_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{\sigma}.\vec{n}\, d\mathcal{S}$$

soit, pour les composantes suivant les vecteurs $\vec{e_i}$, $i = 1 \ldots 3$, d'une base orthonormée :

$$\mathcal{R}_i = \sum_{j=1}^{3} \iint_{\mathcal{S}} \sigma_{ij}\, n_j\, d\mathcal{S}$$

On reconnaît dans l'intégrande le flux d'un vecteur $\vec{\sigma}^{(i)}$ de composantes $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$. On peut donc appliquer le théorème de Stokes-Ostrogradski :

$$\mathcal{R}_i = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}.\vec{\sigma}^{(i)}\, d\mathcal{V} = \sum_{j=1}^{3} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, d\mathcal{V} \,\widehat{=}\, \iiint_{\mathcal{V}} \partial_j \sigma_{ij}\, d\mathcal{V} \tag{43}$$

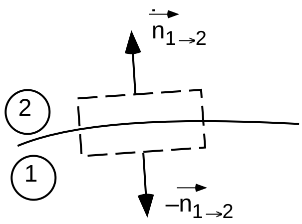

Figure 32: Interface entre deux milieux élastiques. Un bilan effectué sur la boîte infinitésimale dont on fait tendre la hauteur vers zéro permet d'établir les conditions de passage pour les composantes du tenseur des contraintes.

On vérifiera à titre d'exercice que cette expression redonne bien celle de la “poussée d'Archimède” dans le cas d'un champ de pression hydrostatique.

La condition d'équilibre d'un milieu élastique siège d'un champ de contrainte $\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r})$ s'obtient en écrivant que la résultante des forces surfaciques (en l'absence de force de volume) doit être nulle $\forall \mathcal{S}$, soit :

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \ \forall i = 1 \ldots 3$$

On obtiendra facilement la condition d'équilibre en présence d'un champ de force volumique $\vec{\phi}$, sous forme compacte : $\partial_j \sigma_{ij} + \phi_i = 0 \ \forall i$.

Continuité du champ de contrainte à une interface — Considérons une interface $\mathcal{I}$ entre deux milieux élastiques 1 et 2. Ecrivons l'équilibre du système limité par une boîte cylindrique de base $d\mathcal{S}$ et de directrice parallèle à la normale à $\mathcal{S}$ au point considéré, à cheval sur l'interface, et de hauteur infinitésimale (Fig. 32). Lorsque celle-ci tend vers zéro, il est clair que la contribution des forces volumiques éventuelles et des forces surfaciques sur les bords est négligeable devant celle des forces surfaciques sur les bases qui s'écrit $(\overleftrightarrow{\sigma}^{(2)} - \overleftrightarrow{\sigma}^{(1)}).\vec{n}_{1\to 2}\, d\mathcal{S}$. Ce vecteur doit être nul. En particulier, si on choisit $\vec{e}_3 = \vec{n}_{1\to 2}$, on doit avoir continuité des σ_{i3} à l'interface pour $i = 1 \ldots 3$.

2.3.2 Tenseur des déformations

Nous allons généraliser la notion de “déformations” d'un milieu, qui a été définie dans les deux cas canoniques de la traction uniaxiale et du cisaillement simple. Gardons à l'esprit que ce qui nous motive est l'établissement d'une relation constitutive entre “contrainte” et “déformations” généralisant la loi de Hooke. Dans ces conditions, il est clair que ni une translation ni une rotation en bloc du milieu ne vont générer des contraintes élastiques. Intéressons nous donc aux déplacements relatifs de deux points proches, et en particulier à l'accroissement relatif de leur séparation qui en résulte.

Notons $\vec{u}(\vec{r})$ le champ de déplacement dans le milieu. Deux points proches A et B situés respectivement en $\vec{r}$ et $\vec{r} + \vec{dl}$ se transforment en A' B' tels que : $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}(\vec{r})$ et $\overrightarrow{BB'} = \vec{u}(\vec{r} + \vec{dl})$. On a donc $\overrightarrow{A'B'} = \vec{dl'}$ avec :

$$\vec{dl'} = \vec{dl} + \vec{u}(\vec{r} + \vec{dl}) - \vec{u}(\vec{r})$$

En spécifiant chaque composante $i = 1 \ldots 3$:

$$dl'_i = dl_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dl_j$$

Calculons maintenant les longueurs dl et dl' des vecteurs.

$$dl^2 = dl_i.dl_i$$

$$(dl')^2 = dl'_i.dl'_i = (dl_i + \partial_j u_i\, dl_j)(dl_i + \partial_k u_i\, dl_k) \simeq dl^2 + \partial_j u_i dl_i dl_j + \partial_k u_i dl_i dl_k$$

où on s'est limité au termes dominants. On a usé et abusé de la sommation implicite sur les indices répétés. Il est important de remarquer que l'indice répété est muet et qu'on peut donc en changer le nom. Plus précisément, on se persuadera que $\partial_k u_i dl_i dl_k = \partial_i u_j dl_i dl_j$. On obtient donc en définitive :

$$dl' \simeq dl \left(1 + \sum_{i,j} \epsilon_{ij} \frac{dl_i dl_j}{dl^2} \right) \tag{44}$$

avec

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{45}$$

L'équation (44) décrit dans la limite des petites déformations une relation (bi)linéaire, définissant un nouveau tenseur $\overleftrightarrow{\epsilon}$, dit *tenseur des contraintes*, qui est représenté — une fois une base orthonormée choisie — par une matrice 3×3 *symétrique* de coefficients ϵ_{ij}.

Lors d'une traction uniaxiale $\vec{u} = a.x_1\, \vec{e}_1$, un seul coefficient est non nul : $\epsilon_{11} = a$ qui s'identifie bien à l'allongement relatif, mesure de la déformation impliquée dans la loi de Hooke.

Lors d'un cisaillement simple $\vec{u} = \gamma.x_2\, \vec{e}_1$, seuls les termes diagonaux $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \gamma/2$ sont non nuls. Ici encore, à un facteur 1/2 près, on retrouve la mesure du cisaillement.

Pour un cisaillement pur $\vec{u} = \gamma.x_2\, \vec{e}_1 + \gamma.x_1\, \vec{e}_2$, on a $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \gamma$. On retrouve le facteur 2 entre les deux cisaillements mis en évidence précédemment.

2.3.3 Loi de Hooke généralisée pour un milieu élastique linéaire et isotrope

Nous sommes maintenant en mesure de proposer une relation constitutive *linéaire* entre les deux tenseurs *symétriques* $\overleftrightarrow{\sigma}$ et $\overleftrightarrow{\epsilon}$ qui généralise les relations empiriques énoncées dans le cas des déformations canoniques (traction uniaxiale et cisaillement simple). Plaçons nous dans un premier temps dans une base orthonormée très particulière, celle des vecteurs propres du tenseur des contrainte, $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$. Un cube unitaire de faces normales aux vecteurs de base est soumis à des contraintes de traction/compression σ_i^* sur chacune de ses faces. Si le matériau est *isotrope*, on sait que les déformations résultantes sont des étirements ou des raccourcissements suivant les trois axes qui sont donc également des axes principaux du tenseur des déformations.

Profitons de la linéarité des équations de Hooke pour décomposer l'action globale en actions élémentaires. Les contraintes $\pm\sigma_1^* \vec{e}_1^*$ appliquées sur les faces normales à $\vec{e}_1^*$ induisent une déformation "directe" dans la même direction et une déformation suivant les deux directions orthogonales dues à l'effet Poisson. À la fin de cette étape on a donc :

$$\text{Étape 1}\left\{\begin{array}{lll}\epsilon_1^* & = & \frac{\sigma_1^*}{E}\\ \epsilon_2^* & = & -\nu\frac{\sigma_1^*}{E}\\ \epsilon_3^* & = & -\nu\frac{\sigma_1^*}{E}\end{array}\right.$$

On applique ensuite la contrainte σ_2^* :

$$\text{Étape 2}\left\{\begin{array}{lll}\epsilon_1^* & = & \frac{\sigma_1^*}{E}-\nu\frac{\sigma_2^*}{E}\\ \epsilon_2^* & = & \frac{\sigma_2^*}{E}-\nu\frac{\sigma_1^*}{E}\\ \epsilon_3^* & = & -\nu\frac{\sigma_1^*}{E}-\nu\frac{\sigma_1^*}{E}\end{array}\right.$$

Enfin, après application de σ_3^* :

$$\text{Étape 3}\left\{\begin{array}{lll}\epsilon_1^* & = & \frac{\sigma_1^*}{E}-\nu\frac{\sigma_2^*}{E}-\nu\frac{\sigma_3^*}{E}\\ \epsilon_2^* & = & \frac{\sigma_2^*}{E}-\nu\frac{\sigma_1^*}{E}-\nu\frac{\sigma_3^*}{E}\\ \epsilon_3^* & = & \frac{\sigma_3^*}{E}-\nu\frac{\sigma_1^*}{E}-\nu\frac{\sigma_2^*}{E}\end{array}\right.$$

Ces dernières relations, très utiles, donnent les déformations du système pour un champ de contrainte *quelconque*, exprimé dans la base propre des tenseurs de contraintes et déformations.

On notera que $\epsilon_1^*+\epsilon_2^*+\epsilon_3^*$ est la trace de $\overleftrightarrow{\epsilon}$ qui est un invariant du tenseur. En outre, cette trace vaut :

$$Tr\,\overleftrightarrow{\epsilon}=\partial_1 u_1+\partial_2 u_2+\partial_2 u_3=div\vec{u}$$

et s'identifie donc à la variation relative de volume du système, comme nous l'avons déjà vu.

En sommant les trois lignes de l'étape 3, on obtient :

$$Tr\,\overleftrightarrow{\epsilon}=\frac{1-2\nu}{E}\,Tr\,\overleftrightarrow{\sigma}$$

Faisons intervenir la grandeur $Tr\,\overleftrightarrow{\sigma}$ invariante par changement de base dans la loi de Hooke :

$$\left\{\begin{array}{lll}\epsilon_1^* & = & (1+\nu)\frac{\sigma_1^*}{E}-\nu\frac{Tr\,\overleftrightarrow{\sigma}}{E}\\ \epsilon_2^* & = & (1+\nu)\frac{\sigma_2^*}{E}-\nu\frac{Tr\,\overleftrightarrow{\sigma}}{E}\\ \epsilon_3^* & = & (1+\nu)\frac{\sigma_3^*}{E}-\nu\frac{Tr\,\overleftrightarrow{\sigma}}{E}\end{array}\right.$$

Qui s'écrit sous forme compacte :

$$\overleftrightarrow{\epsilon}=(1+\nu)\frac{\overleftrightarrow{\sigma}}{E}-\nu\frac{Tr\,\overleftrightarrow{\sigma}}{E}\overleftrightarrow{1}$$

Il est essentiel de noter que cette dernière expression ne faisant plus intervenir d'indices est valable *quelque soit la base choisie*. Il s'agit donc bien de la généralisation promise de la loi de Hooke pour un milieu élastique linéaire et isotrope. Ceci étant dit, on pourra préférer la relation valable entre les composantes des tenseurs de contraintes et de déformations une fois choisie une base orthonormée quelconque :

$$\epsilon_{ij}=(1+\nu)\frac{\sigma_{ij}}{E}-\nu\frac{\sigma_{kk}}{E}\delta_{ij} \tag{46}$$