Considérons maintenant un barre de longueur à vide L_0 dont on bloque la déformation axiale à l'aide d'un support infiniment rigide et dont le coefficient de dilatation est nul[10]. La barre reste libre de se dilater radialement. On a alors le long de l'axe $\epsilon_3^* = 0$ tandis que latéralement $\sigma_1^* = \sigma_2^* = 0$. On déduit de l'eq.(48) que la tige est le siège d'une contrainte axiale σ_3^* ; plus précisément :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \epsilon_1^* & = & \epsilon_2^* & = & -\nu\frac{\sigma_3^*}{E} & + & \alpha_l \Delta T \\ \epsilon_3^* & = & 0 & = & \frac{\sigma_3^*}{E} & + & \alpha_l \Delta T \end{array} \right.$$

d'où $\sigma_3^* = -E\alpha_l\Delta T$, contrainte compressive si $\Delta T > 0$ qui se développe en réaction à la dilatation bloquée le long de l'axe. NB. Une telle compression peut être suffisante pour faire flamber une barre mince de rapport d'aspect $R/L < \alpha_l \Delta T$.

3 Dynamique des fluides newtoniens

Nous avons introduit en section 1.2 la relation constitutive des fluides newtoniens sur une base essentiellement empirique qui nous a permis de traiter quelques situations simples. À l'instar du travail réalisé au chapitre précédent sur la loi de Hooke, nous allons ici généraliser la loi de Newton.

En section 1.4 nous avons établi l'expression locale de la conservation de la quantité de mouvement *en l'absence de contraintes visqueuses.* Il conviendra de compléter cette équation d'Euler par son terme visqueux pour obtenir l'équation de Navier-Stokes. Nous verrons alors apparaître deux types d'écoulements limites, ceux "dominés pas l'inertie" et ceux "dominés par la viscosité", identifiés par la valeur d'un nombre sans dimension (nombre de Reynolds) prenant en compte autant les caractéristiques du fluide que la géométrie de l'écoulement.

Nous montrerons que pour les écoulements inertiels la conservation de l'énergie peut se mettre sous une forme simple et extrémement utile (principe de Bernoulli). Ce faisant, nous nous rendrons compte que la notion même d'écoulement inertiel n'est pas sans ambiguïté ; la notion de *couche limite visqueuse* associée à celle de nombre de Reynolds permettra de donner une signification qualitative précise à la typologie des écoulements inertiels/visqueux.

3.1 Cinématique des fluides

3.1.1 Trajectoires et lignes de courant

Afin de "visualiser un écoulement", on ensemence le fluide de petites particules identifiables optiquement. Dans un premier temps on réalise un film de l'écoulement avec une vitesse d'acquisition telle qu'il est possible de reconstituer le parcours de chaque particule. On obtient alors un ensemble de *trajectoires* de particules fluides[11] Dans un second temps, on réalise une seule photo avec

[10] Certains alliages ont en effet un coefficient de dilatation thermique quasi nul ; c'est le cas de l'acier "INVAR". Pour un métal standard, ce sont les vibrations thermiques des atomes dans un potentiel d'interaction asymétrique qui induisent une augmentation de la distance interatomique *moyenne* et donc une dilatation macroscopique.

[11] En toute rigueur, il s'agit des trajectoires des marqueurs dans l'écoulement qu'ils peuvent éventuellement perturber. On parlera de marqueurs *passifs* lorsqu'ils reproduisent fidélement le mouvement des particules fluides qu'ils remplacent.

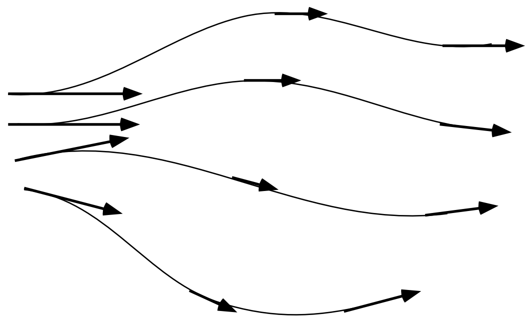

Figure 33: Représentation instantanée des lignes de courant d'un écoulement fluide. Les vecteurs vitesse sont tangents aux lignes. Noter que leurs modules croissent lorsque les lignes se reserrent, signe que le fluide n'est pas comprimé.

un temps de pause suffisamment long pour que le mouvement des particules imprime de petites portions rectilignes identifiables à leurs vecteurs vitesses au moment de la prise. Si la densité de particules est suffisante, on pourra tracer sur le cliché une famille de courbes partout tangentes aux vecteurs vitesses. Ces courbes sont les "lignes de courant" de l'écoulement.

Il est clair que si on reprend une photo à un instant ultérieur, la carte des lignes de courant aura en général changé. Si ce n'est pas le cas et que cette carte est invariable dans le temps, c'est que l'écoulement est *stationnaire*, *i.e.* que le champ de vitesse $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r}, t)$ ne dépend pas du temps. Dans ce cas, par construction, une particule située sur une ligne de courant à un instant t s'y retrouvera à tout instant ultérieur[12] (décomposer son mouvement en petites séquences de durée dt et utiliser le champ de vitesse visualisé par les traces pour incrémenter sa position). *Les trajectoires s'identifient donc aux lignes de courant pour un écoulement stationnaire.*

3.1.2 Divergence et rotationnel

On a vu en section 1.4 quelle était la signification de la divergence du champ de vitesse $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r})$, taux de variation du volume d'une masse de fluide lors de son mouvement (advection) dans l'écoulement. Il est alors naturel que cette grandeur scalaire, $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{v}$ apparaisse dans l'équation de continuité :

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} + \rho\,\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{v} = 0$$

En particulier, un écoulement tel que $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{v} = 0$ conservera la masse volumique du fluide (qui se comportera donc *comme* un fluide "incompressible").

L'électromagnétisme et les équations de Maxwell nous montrent que le rotationnel d'un champ peut être, à l'instar de sa divergence, une grandeur im-

[12] Il est essentiel de noter que la vitesse d'une particule donnée varie dans le temps lors de son trajet $\overrightarrow{R}(t)$ dans le fluide. En effet, la vitesse "eulerienne" $\overrightarrow{v}$ est différente en chaque point, même si en un point donné elle est constante — ce qui est le cas si l'écoulement est stationnaire. La vitesse "lagrangienne" $\overrightarrow{V}$ de la particule alors du temps comme :$\overrightarrow{V}(t) = \overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{r} = \overrightarrow{R}(t), t\right) = \overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{R}(t)\right)$.

portante. Qu'en est-il de $\vec{\nabla} \times \vec{v}$? Pour cela, étudions trois écoulements élémentaires.

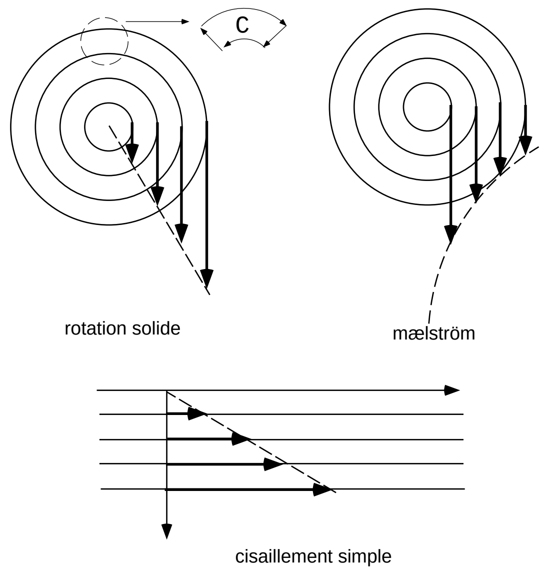

Figure 34: Trois écoulements élémentaires. Le mælström est représenté pour $Q = 0$. Le théorème de Stokes appliqué au petit circuit élémentaire $\mathcal{C}$ permet de retrouver l'expression de $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ en coordonnées cylindriques.

Rotation solide — Cet écoulement autour du pôle O est décrit par un champ de vitesse orthoradial :

$$v_\theta(r) = \Omega\, r$$

C'est le champ de vitesse d'un fluide tournant "en bloc" autour de l'axe Oz. Les lignes de courant sont donc des cercles concentriques. Il est clair que ce écoulement conserve le volume et on vérifie bien que $\vec{\nabla}.\vec{v} = dv_\theta/dr = 0$.

En appliquant le théorème de Stokes au circuit fermé de la figure 34, on trouve que

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{d(rv_\theta)}{dr}\,\vec{e}_z = 2\Omega\,\vec{e}_z = 2\vec{\Omega}$$

Le rotationnel, ici bien nommé, est donc directement associé à la rotation solide du fluide.

Mælström — Encore un écoulement autour du pôle O auquel se superpose une composante radiale :

$$\vec{v}(r) = \frac{1}{2\pi\, r}\left[\Gamma\,\vec{e}_\theta - Q\,\vec{e}_r\right] \quad (r > 0)$$

On a cette fois-ci

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{d(rv_r)}{dr} = 0 \quad (r > 0)$$

mais attention ! au point O le champ est singulier. Le flux de $\vec{v}$ à travers une *surface fermée entourant* O est *non nul*, et vaut $-Q$ comme on le vérifie facilement pour un cercle de rayon $R > 0$. Comme nous le dit Ostrogradski, cette valeur est entièrement attribuable à la singularité en O puisque la divergence est nulle partout ailleurs. O est un "puits" par lequel s'écoule le fluide.

Cet écoulement représente tant bien que mal le tourbillon associé à un lavabo qui se vide.

En reprenant l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques de l'exemple précédent, on trouve que :

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \quad (r > 0)$$

Ce n'est pas "parce que ça tourne qu'il y a du rotationnel" ! Encore une fois on se méfiera de la singularité du champ en O. En effet, la circulation de $\vec{v}$ le long d'une *courbe fermée entourant* O vaut Γ, comme on le vérifie directement sur l'exemple d'un cercle de centre O.

Cisaillement simple — Le champ de vitesse est :

$$\vec{v} = S\, y\, \vec{e}_x$$

Les lignes de courant sont des droites parallèles à Ox. Pour cet écoulement conservant le volume on a bien sur $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$ mais :

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = -\frac{dv_x}{dy}\vec{e}_z = -S\vec{e}_z$$

Là où rien ne semble tourner (lignes de courant rectilignes) on a pourtant un rotationnel non nul.

Pour mieux comprendre la signification du rotationnel dans ce cas, décomposons le cisaillement simple en faisant apparaître un cisaillement pur et une rotation solide autour de Oz :

$$\vec{v} = \left| \begin{array}{l} Sy \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}Sy \\ \frac{1}{2}Sx \\ 0 \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}Sy \\ -\frac{1}{2}Sx \\ 0 \end{array} \right.$$

Ce dernier terme est bien le champ de vitesse associé à une rotation solide de vecteur

$$\vec{\Omega} = -\frac{1}{2}S\,\vec{e}_z = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{v}$$

On retiendra qu'un écoulement peut se décomposer (en chaque point) en une composante rotation solide dont le vecteur rotation est donné par la moitié du rotationnel et une composante purement élongationnelle (comme un cisaillement pur), i.e. ne faisant qu'étirer et comprimer les particlues fluides suivant deux directions orthogonales.

3.2 Dynamique des fluides

3.2.1 Tenseur des taux de déformation — Relation constitutive généralisée des fluides newtoniens.

La composante rotation solide ne met en jeu aucun cisaillement (glissement de couches fluides) et ne nous intéresse donc pas pour généraliser la relation constitutive des fluides visqueux newtoniens. En revanche, la composante élongationnelle

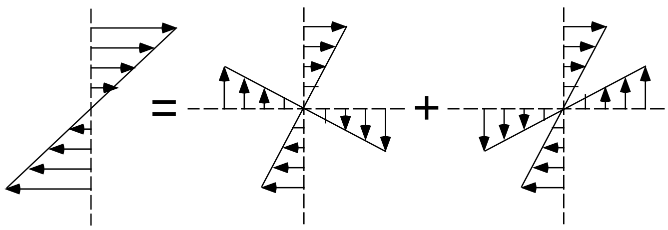

Figure 35: Décomposition d'un cisaillement simple en une rotation solide (rotationnelle) et un cisaillement pur (élongationnel et irrotationnel).

est directement associée à la dissipation visqueuse (*cf.* cisaillement pur). Cette remarque est analogue à celle qui, en élasticité, nous a poussés à étudier l'allongement d'un élément solide et à définir le tenseur symétrique associé $\overleftrightarrow{\epsilon}$, tenseur des déformations.

On définit ici naturellement *tenseur des taux de déformations* $\overleftrightarrow{\gamma}$ par sa représentation dans une base orthonormée quelconque :

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$\gamma_{ij}(t_0)\Delta t$ est la petite déformation subite par le fluide à partir d'un état de référence pris à $t = t_0$.

L'expression la plus générale du tenseur des contraintes dans un fluide visqueux newtonien isotrope[13] dont on néglige la compressibilité[14] est la suivante :

$$\sigma_{ij} = -P\,\delta_{ij} + 2\eta\,\gamma_{ij} \tag{49}$$

On retrouve bien le terme isotrope faisant intervenir la pression P (attention au signe !). Le paramètre η est la viscosité dynamique introduite au 1.2.4. En effet, comme on s'en persuadera, pour un cisaillement simple $\overrightarrow{v} = Sx_2\overrightarrow{e}_1$, le tenseur des taux de déformation se réduit à deux termes $\gamma_{12} = \gamma_{21} = S/2$. On a donc dans ce cas $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -P + \eta\,S$ ce qui est la définition empirique de la viscosité newtonienne.

3.2.2 Équation de Navier-Stokes

Nous sommes désormais en mesure de compléter l'équation (17) en y faisant apparaître la résultante des forces visqueuses. Nous avons déjà fait le travail technique en transformant la résultante des contraintes visqueuses en une intégrale volumique (Eq. (43)) :

$$\mathcal{R}_i^{visc} = \iiint 2\eta\partial_j\gamma_{ij}\,d\mathcal{V}$$

[13] Il existe des fluides anisotropes, dits *cristaux liquides*.

[14] Lorque la compressibilité est essentielle, par exemple en acoustique, l'équation la plus générale est : $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\eta(\gamma_{ij} - \gamma_{kk}\delta_{ij}/3) + \zeta\gamma_{kk}\delta_{ij}$ où apparaît naturellement la trace du tenseur des taux de déformation, γ_{kk} qui s'identifie au taux de compression ; nulle pour un fluide "incompressible". Le paramètre ζ est une viscosité qui rend compte de l'atténuation des ondes sonores

Le terme dans l'intégrale peut être développé en :

$$2\partial_j\gamma_{ij} = \underbrace{\partial^2_{jj}v_i}_{\Delta v_i} + \underbrace{\partial_i\partial_j v_j}_{\overrightarrow{grad}(\underbrace{div\,\overrightarrow{v}}_{=0})_i} = \Delta v_i$$

qui n'est autre que le laplacien de la composante (scalaire) v_i. On obtient en définitive l'équation locale du mouvement[15], dite de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla}\right) v_i = -\partial_i P + \rho g_i + \eta\Delta v_i \qquad (50)$$

où on a réduit les forces volumiques aux forces de gravitation.

Exemple : écoulement de Poiseuille plan — Considérons à titre d'exemple l'écoulement *stationnaire* d'un fluide de viscosité η dans un conduit compris dans l'interstice entre les deux plans $y = 0$ et $y = e$, de longueur $L \gg e$ suivant x et infini dans la troisième direction, faisant un angle α avec l'horizontale.

On cherche la solution sous la forme d'un champ de vitesse $\overrightarrow{v} = v_x(x, y)\,\overrightarrow{e}_x$ qui est bien compatible avec les conditions aux limites sur les parois imperméables du conduit.

On suppose que le fluide n'est pas comprimé dans cet écoulement et que par conséquent $div\,\overrightarrow{v} = 0$. On en déduit que $\partial v_x/\partial x = 0$ *i.e.* que v_x ne dépend que de y.

Étudions maintenant l'équation de Navier-Stokes (50). Le terme $\partial_t\overrightarrow{v}$ est nul en stationnaire. En outre, les lignes de courant étant parallèles entre elles, nous avons vu au 1.4.3 que le terme convectif en $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla}$ était lui aussi identiquement nul.

Il est utile de définir une "pression réduite"

$$P^* = P + \Psi$$

où Ψ est l'énergie potentielle dont dérivent les forces de gravitation ($\rho\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\nabla}\Psi$). Ici on montrera facilement que :

$$\Psi = -\rho g[(\sin\alpha)x - (\cos\alpha)y]$$

L'équation de Navier-Stokes se résume à l'équation dite de Stokes :

$$\partial_i P^* = \eta\Delta v_i \;\; (i = 1\ldots 3)$$

On a donc, après projection sur les deux axes pertinents :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial P^*}{\partial x} & = & \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial P^*}{\partial y} & = & 0 \end{array}\right.$$

On déduit de la seconde équation que $P^* = p^*(x)$; en reportant dans la première équation, on obtient, pour tout (x, y) l'égalité entre une fonction de x

[15]Il ne faut pas oublier que pour établir cette équation on a utilisé que $div\overrightarrow{v} = 0$ et que cette relation, vestige de l'équation de continuité, est indispensable à la résolution du problème hydrodynamique.

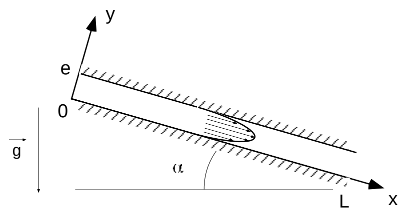

Figure 36: Écoulement entre deux plans parallèles inclinés dans le champ de pesanteur.

seul et une fonction de y seul. Cela implique nécessairement que les deux termes sont égaux à une même *constante*. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{dp^*}{dx} & = & A \\ \eta\frac{d^2v_x}{dy^2} & = & A \end{array}\right.$$

Soit après intégration :

$$\left\{\begin{array}{lcl} P^* & = & P_0^* + Ax \\ v_x & = & \frac{A}{\eta}\left(\frac{y^2}{2} + Bx + C\right) \end{array}\right.$$

Les constantes A, B et C restent à déterminer à partir des conditions aux limites sur $\overrightarrow{v}$ et P^*. En particulier, $v_x(y=0) = v_x(y=e) = 0$, d'où $C = 0$ et $B = -e/2$. Le profil de vitesse est parabolique, de courbure déterminée par le gradient de pression réduite :

$$v_x(y) = -\frac{1}{2\eta}\frac{dP^*}{dx}(e-y)y$$

Examinons deux configurations classiques :

(i) Conduit horizontal mis sous pression à l'entrée :

$$\alpha = 0, P(x=0) = P_0 + \Delta P, P(x=L) = P_0$$

On a alors :

$$A = \frac{dP^*}{dx} = \frac{dP}{dx} = -\frac{\Delta P}{L}$$

le gradient de pression est constant le long du conduit. Un écoulement visqueux est donc associé à une “chute de presssion” le long du conduit.

(ii) Conduit incliné entre deux réservoirs à la même pression :

$$\alpha \neq 0, P(0) = P(L) = P_0$$

Dans ce cas :

$$A = -\rho g \sin\alpha$$

La pression reste constante le long du tube. Les variations de pression hydrostatique sont exactement compensées par la chute de pression induite par la viscosité.

On notera que dans les deux cas, la vitesse est bien positive lorsque le moteur de l'écoulement (ΔP ou $\rho g \sin\alpha$) est positif.

3.2.3 Régimes d'écoulement — Nombre de Reynolds

Dans le cas d'un écoulement "parallèle", on vient de le voir encore, le terme non linéaire en vitesse $\rho(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v}$ est *rigoureusement* nul. La dynamique stationnaire du fluide est alors entièrement déterminée par le teme de frottement visqueux ($\eta\Delta\overrightarrow{v}$). Ce type d'écoulement ne s'observe que pour des géométries *ad hoc*. Ne peut-on pas cependant espérer identifier *a priori* des écoulements dominés pas l'inertie et d'autres par la dissipation visqueuse ? À cette question la réponse est heureusement *oui* ! même s'il nous faudra *in fine* préciser cette affirmation et "remettre la viscosité à sa place".

Écoulements similaires — Considérons un écoulement stationnaire ne mettant en jeu qu'une seule échelle de longueur ; par exemple l'écoulement autour d'une sphère de rayon R ou dans un long tuyau de diamètre $2R$. La vitesse uniforme du fluide à l'infini est V. Il semble naturel de prendre R et V comme unités respectives de distance et de vitesse, i.e. de définir les grandeurs sans dimensions $\overrightarrow{r}' = \overrightarrow{r}/R$ et $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{v}/V$. En notant d'un prime les opérateurs impliquant les dérivées spatiales par rapport aux nouvelles variables $x_i' = x_i/R$, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\frac{\rho V^2}{R}(\overrightarrow{v}'.\overrightarrow{\nabla}')\overrightarrow{v}' - \frac{1}{R^2}\Delta'\overrightarrow{v}' = -\overrightarrow{\nabla}'P$$

soit encore :

$$(\overrightarrow{v}'.\overrightarrow{\nabla}')\overrightarrow{v}' - \frac{1}{\mathcal{R}e}\Delta'\overrightarrow{v}' = -\overrightarrow{\nabla}'P'$$

où P' est la pression adimensionnée par ρV^2 et où le paramètre *sans dimension* $\mathcal{R}e$, "nombre de Reynolds", vaut :

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho R V}{\eta} \tag{51}$$

On est désormais en mesure de répondre à une question pratique : quels renseignements peut-on tirer de l'étude de l'écoulement d'un fluide autour d'une maquette fidèle mais en modèle réduit d'un objet (avion, bateau, ...) ? On voit qu'il faut s'arranger pour que les nombres de Reynolds des deux écoulements soient égaux ; c'est à dire que l'écoulement autour du modèle réduit devra impliquer des vitesses V d'autant plus grandes que la maquette est plus petite[16]. Dans ces conditions, une unique fonction $\overrightarrow{v}'(\overrightarrow{r}')$ décrira les deux écoulements[17] et la mesurer sur la maquette en soufflerie ou bassin des carènes renseignera complètement sur l'écoulement réel[18].

Régimes d'écoulements — Ne pas veiller à conserver le nombre de Reynolds peut mener à des écoulements quantitativement mais surtout qualitativement très différents, puisque la valeur de $\mathcal{R}e$ détermine les poids respectifs du terme visqueux, linéaire en vitesse et du terme inertiel convectif, quadratique. Plus

[16] On peut également utiliser un fluide moins visqueux ou plus dense

[17] Pour imposer un tel écoulement, il faudra également appliquer des pressions à l'infini plus élevées, dans le rapport des vitesses au carré.

[18] La condition de similitude des écoulements (même $\mathcal{R}e$) est très contraignante car on ne peut pas augmenter la vitesse au delà de la vitesse du son sans perdre la condition essentielle d'incompressibilité du fluide (*cf.* section suivante).

précisément, on peut maintenant identifier deux régimes extrèmes bien distincts ($\mathcal{R}e \ll 1$ ou $\gg 1$) régis par des équations simplifiées[19] :

$$\begin{array}{r|l|ll}
\mathcal{R}e \gg 1 & \text{Inertie dominante} & \rho\vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P & \text{(Euler)} \\
\mathcal{R}e \ll 1 & \text{Viscosité dominante} & \eta\Delta\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,P & \text{(Stokes)} \\
\mathcal{R}e \sim 1 & & \rho\vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} - \eta\Delta\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P & \text{(Navier - Stokes)}
\end{array}$$

Ordres de grandeur — Le nombre de Reynolds utilisé pour déterminer *a priori* ou *a posteriori* le régime découlement n'est pas défini sans ambiguïté ; doit-on prendre le rayon ou le diamètre d'un tube ? La largeur ou la hauteur d'une voiture ? Il convient cependant de noter qu'un critère du type $\mathcal{R}e \ll 1$ est stable vis à vis d'un facteur 2 sur la définition de $\mathcal{R}e$! Nous donnons ci-dessous quelques ordres de grandeur de $\mathcal{R}e$ pour des écoulements typiques.

	L(m)	V(m/s)	$\nu = \eta/\rho$ (m^2/s)	$\mathcal{R}e = VL/\nu$
Manteau terrestre	10^5	10^{-9}	10^{20}	10^{-24}
Bactérie	3×10^{-6}	10^{-5}	10^{-6}	3×10^{-5}
Poussière	10^{-5}	10^{-2}	10^{-5}	10^{-2}
Automobile	1	30	10^{-5}	3×10^6
Vent	10^5	10	10^{-5}	10^{11}

On voit clairement se dégager les écoulements à très petit nombre de Reynolds et ceux à très grand.

3.2.4 Théorème de Bernoulli

On se place dans le cas d'un écoulement stationnaire, à divergence nulle, et à grand nombre de Reynolds. La dynamique de l'écoulement est alors régie par l'équation d'Euler :

$$\rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla}P^* = \vec{0}$$

Le terme inertiel peut se mettre sous une forme très utile qui apparaît clairement en utilisant les notations symboliques introduites prédemment

$$v_j\partial_j v_i = \frac{1}{2}\partial_i(v_jv_j) + v_j(\partial_j v_i - \partial_i v_j)$$

C'est à dire, "en clair" :

$$(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\,v^2 + (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}) \times \vec{v}$$

L'identification du second terme du second membre, où apparaît le rotationnel de la vitesse, demande certes un petit peu de travail algébrique[20] !

[19] Ne pas oublier l'équation de continuité qui, dans toute cette partie, se réduit à div $\vec{v} = 0$.

[20] La seule propriété qui nous intéresse ici est que ce terme est orthogonal à $\vec{v}$, ce qui se vérifie directement en remarquant que leur produit scalaire $v_iv_j(\partial_jv_i - \partial_iv_j)$ est égal à son opposé (permuter i et j qui sont ici des indices muets de sommation implicite) et est donc nul.

Intégrons maintenant l'équation d'Euler *le long d'une ligne de courant $\mathcal{C}$* joignant les points A et B :

$$\vec{0} = \int_{\mathcal{C}} [\rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla} P^*].\vec{dl} = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{\rho v^2}{2} + P^*\right].\vec{dl} + \int_{\mathcal{C}} [\rho(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}) \times \vec{v}].\vec{dl}$$

Cette dernière intégrale est nulle, compte-tenu de la note précédente, puisque le long d'une ligne de courant, le vecteur tangent $\vec{dl}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

On obtient donc, en utilisant la définition du gradient :

$$\vec{0} = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{\rho v^2}{2} + P^*\right].\vec{dl} = \left[\frac{\rho v^2}{2} + P^*\right]_A^B \tag{52}$$

Ce qui s'exprime également par :

"La densité volumique d'énergie mécanique $\rho v^2/2 + P + \rho g z$ est constante le long d'une ligne de courant".

On a ici choisi le cas particulier (mais usuel) où la seule force volumique et la gravité, dirigée vers les $z < 0$.

Cavitation — On retiendra qu'en absence d'effet de gravité, les survitesses sont associées à des dépressions. Or de telles survitesses apparaissent naturellement aux extrémités de rotors, hélices de bateau par exemple. Dans l'eau, les dépressions associées peuvent tout à fait atteindre la pression de vapeur saturante correspondant à l'équilibre liquide-vapeur (2.3 kPa à 20°C. L'apparition de bulles de vapeur — on parle de *cavitation* — peut être très violente et endommager l'hélice.

Pour fixer les idées, $\Delta P = 1$ atm i.e. $P = 0$ pour $v = 14$ m/s.

Application : Anémomètre à tube de Pitot — Un long cylindre percé de deux petits trous, l'un (A) à son extrémité au vent l'autre (B) en aval, est placé dans un écoulement fluide uniforme (vitesse V sur une échelle bien supérieure au diamètre du tube ; celui-ci ne perturbe alors que peu l'écoulement qui redevient parallèle avace une vitesse V au niveau du trou aval. Les deux trous ouvrent sur des conduits reliés aux deux branches d'un manomètre qui met en évidence une différence de pression $\Delta P > 0$ entre l'extrémité et l'aval. Dans la limite de l'applicabilité du théorème de Bernoulli, on peut facilement calculer ΔP. On considère une première ligne de courant qui part de l'infini ($P = P_0$) et se termine au point A. Si le trou est assez petit pour que le fluide n'y pénètre pas, la vitesse $V_A = 0$. On a alors $P_A = P_0 + \rho V^2/2$. Une seconde ligne de courant part de l'infini et longe le cylindre en C, au voisinage du trou B. Comme la vitesse en C est V, on a en application de Bernoulli $P_C = P_0$. En outre, l'écoulement étant parallèle au tube, la pression est uniforme entre C et B. On a donc

$$\Delta P = P_A - P_B = \frac{\rho V^2}{2}$$

Ainsi la mesure de ΔP permet de déterminer V — le tube de Pitot est une anémomètre.

Une remarque s'impose : pourquoi avons nous déterminé la pression en C et non en B ? Le long du tube la vitesse du fluide est nulle, en vertu du principe de non-glissement aux parois. Il existe donc nécessairement une zone

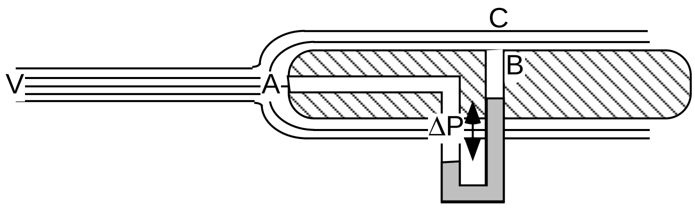

Figure 37: Tube de Pitot relié à un manomètre à niveau de liquide.

de gradient de vitesse entre 0 et V au voisinage du tube. Dans cette zone la viscosité est certainement dominante et Bernoulli caduque. La géométrie allongée du tube et la propriété des écoulements parallèles de transmettre la pression transversalement nous sauvent !

Condition pratique d'obtention d'unécoulements à divergence nulle — On considère un écoulement stationnaire en géométrie "ouverte" pour laquelle on peut trouver une ligne de courant reliant une zone de repos ($P = P_0, V = 0$) à une zone de pleine vitesse V. Bernoulli nous donne la dépression qui règne dans cette zone : $\Delta P = \rho V^2/2$. L'hypothèse d'un écoulement à divergence nulle suppose que cette dépression ne modifie pas sensiblement la masse volumique du fluide, c'est à dire que $|\Delta P| \ll \chi^{-1}$, module de compression isotherme. Cette condition sera effectivement vérifiée tant que

$$V \ll \sqrt{\frac{1}{\rho\chi}} \simeq c_{son}$$

où on reconnaît la vitesse de propagation des ondes sonores longitudinales dans le fluide. Autrement dit, les écoulements subsoniques pour lesquels le nombre de Mach $\mathcal{M}a = V/c_{son}$ reste petit devant 1 ne mettent pas en jeu la compressibilité du fluide qui se comporte comme un fluide "incompressible". On peut alors légitimement supposer que div $\overrightarrow{v} = 0$.

Remarques —

1. Le passage du "mur du son" est une manifestation spectaculaire de la mise en jeu de la compressibilité dans les écoulements supersoniques.
2. En géométrie fermée (cylindre fermé par un piston) on comprimera un fluide (plus particulièrement un gaz) quelle que soit la vitesse.
3. Le raisonnement précédent suppose l'écoulement stationnaire. Dans le cas contraire, par exemple lorsque le fluide est mis en mouvement périodiquement par un haut-parleur, la propagation d'ondes de (faible) compression ne nécessite pas des vitesses supersoniques.

3.3 Du bon usage du nombre de Reynolds — la viscosité remise à sa place

3.3.1 Transport diffusif de la quantité de mouvement — épaisseur de peau visqueuse

Considérons un fluide newtonien de viscosité η et de densité ρ placé au dessus ($y > 0$) d'une plaque infinie oscillant dans son plan. La vitesse de la plaque est $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$. L'écoulement dans le fluide est parallèle à la plaque ; on note $v(y,t)$ le champ de vitesse. Celui-ci satisfait automatiquement l'équation $\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = 0$ et doit être également solution de :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

où on reconnaît une équation de diffusion, la paramètre

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

jouant le rôle de coefficient de diffusion ($[\nu] = [L]^2.[T]^{-1}$).

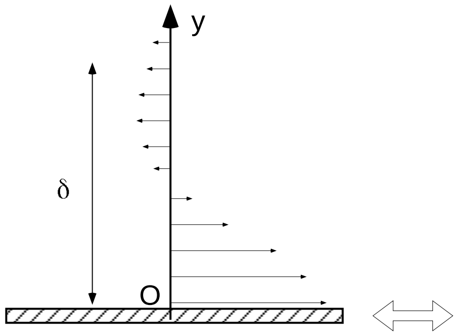

Figure 38: Le champ de vitesse au dessus d'une plaque oscillante ne pénètre que sur une épaisseur δ.

On cherche la solution sous la forme

$$v(y,t) = \Re\{\tilde{V}(y) \exp i\omega t\}$$

En replaçant dans l'équation de diffusion, on trouve que $\tilde{V}$ doit vérifier :

$$\tilde{V}'' = \frac{i\omega}{\nu} \tilde{V}$$

dont les solutions sont combinaisons linéaires des exponentielles complexes $\exp \pm(1+i)y/\delta$ avec

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

seules les solutions à partie réelle décroissante est compatible avec une vitesse nulle à l'infini. On a donc en définitive :

$$v(y,t) = V_0 \exp(-y/\delta) \cos(\omega t + y/\delta)$$

Le champ de vitesse ne pénètre dans le fluide que sur une épaisseur “de peau” δ dont la dépendance vis-à-vis de l'échelle temporelle du mouvement ($\delta \sim \omega^{-1/2}$) est caractéristique d'un phénomène diffusif.

On retiendra que la viscosité “cinématique” ν est un coefficient de diffusion.

Pour l'eau $\eta_{eau} = 10^{-3}$ Pa.s, $\rho_{eau} = 10^3$ kg.m^{-3} d'où $\nu_{eau} = 10^{-6}$ m^2.s^{-1} ; pour l'air $\eta_{air} = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa.s, $\rho_{air} = 1.29$ kg.m^{-3} d'où $\nu_{air} = 1.4 \times 10^{-5}$m^2.s^{-1}.

NB. De façon contre-intuitive s'agissant d'un coefficient "de viscosité", $\nu_{eau} < \nu_{air}$; Comme c'est ν qui intervient dans le nombre de Reynolds, toutes choses étant égales par ailleurs, un écoulement dans l'air a un nombre de Reynolds inférieur au même écoulement dans l'eau.

3.3.2 Couche limite visqueuse

Il nous faut réconcillier deux affirmations :

(i) Un écoulement à $\mathcal{R}e \gg 1$ est régi par l'équation d'Euler ; en particulier, cette équation admet pour solution un écoulement uniforme $\overrightarrow{u} = V\overrightarrow{e}_x$ dasn tout l'espace au dessus d'une plaque parallèle à $\overrightarrow{e}_x$.

(ii) Le non-glissement à l'interface fluide/solide impose une vitesse nulle au niveau de la plaque fixe et donc un gradient de vitesse perpendiculaire à celle-ci.

Il y a donc nécessairement une zone au voisinage de la plaque, dite "couche limite visqueuse", où la viscosité est dominante, et ceci quel que soit le nombre de Reynolds.

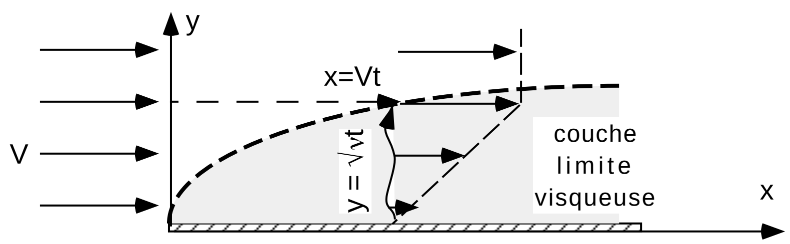

Figure 39: Couche limite visqueuse. La frontière est définie par l'égalité du temps d'advection le long de Ox et du temps de diffusion de la quantité de mouvement perpendiculairement à la plaque.

Considérons la configuration de la figure 39 où un écoulement uniforme arrive au niveau d'une plaque semi-infinie. Les couches fluides sont freinées au niveau de la plaque et leur vitesse s'annule. En revanche, les couches plus éloignées ne "sentent" pas immédiatement la plaque. L'information "il existe une plaque" se transporte en effet par *diffusion* de quantité de mouvement perpendiculairement à l'obstacle tandisque les particules fluides sont advectées à la vitesse V. Soit une particules située à l'altitude y ; l'information lui parviendra au bout d'un temps $t_{diff} \sim y^2/\nu$. Elle se trouvera alors à une abscisse $x = Vt_{diff} = Vy^2/\nu$. Ceci définit une parabole d'axe Ox limitant un domaine inertiel où l'écoulement est uniforme et la couche limite visqueuse où le profil de vitesse est linéaire.

$$y = \sqrt{\frac{\nu}{V}x}$$

La couche limite visqueuse envahit progressivement l'espace. Si la plaque est de longueur L le long de Ox, l'épaisseur maximale de la couche sera $\delta_{visc} = \sqrt{\nu/VL}$, soit :

$$\frac{\delta_{visc}}{L} = \sqrt{\frac{\nu}{VL}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e}}$$

où le nombre de Reynolds est basé sur la distance L. Ainsi, plus le Reynolds de l'écoulement sera élevé, plus la couche limite visqueuse sera mince et plus il sera légitime de dire que l'écoulement est (presque partout) inertiel.

On peut également répondre à la question de savoir où placer le trou latéral de l'anémomètre à tube de Pitot. Outre la nécessité de se trouver loin de l'influence de l'extrémité du tube (i.e. loi devant le rayon R de l'embout), il faut également que l'écoulement dans la couche limite soit approximativement parallèle pour que la pression y soit uniforme. Or la pente de la couche limite est $\alpha = \sqrt{\nu/4Vx}$. Si le nombre de Reynolds basé sur le rayon R du tube est très grand devant 1, la condition $\alpha \ll 1$ sera automatiquement vérifiée pour x_B valant quelques R.

Longueur d'entrée d'un écoulement de Poiseuille — Revenons sur l'écoulement de Poiseuille dans un conduit d'épaisseur h entre deux plaques parallèles entre elles sous l'action d'un gradient de pression $\Delta P/L$. À l'entrée du conduit, l'écoulement est uniforme à la vitesse $\bar{V}$. On sait par ailleurs que le profil de vitesse stationnaire loin des bords est parabolique et s'écrit : $v(y) = 3\bar{V}(1 - 2y/h)^2$.

Comment se fait le raccord ?

D'après l'analyse précédente, deux couches limites vont se développer à partir de chacune des plaques. Lorsque ces deux couches auront envahi le conduit, on pourra dire que le profil parabolique sera pratiquement établi. L'épaisseur de chaque couche sera alors par définition $\delta_{visc} = h/2$ et ceci aura lieu à une distance L_e de l'entrée avec :

$$L_e = h\sqrt{\mathcal{R}e}$$

où $\mathcal{R}e = \bar{V}h/2\nu$. On voit que pour $\mathcal{R}e \ll 1$, la longueur d'entrée L_e sera très petite devant l'épaisseur et l'écoulement de Poiseuille sera établi dans tout le conduit. En revanche, si $\mathcal{R}e \gg 1$, une partie significative du conduit sera le siège d'un écoulement "bouchon" quasi-uniforme.

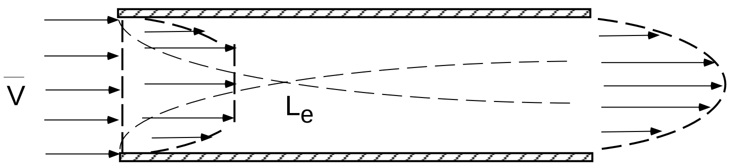

Figure 40: Longueur d'entrée d'un écoulement visqueux dans un conduit.

Lorque la longueur du conduit est $L \ll L_e$, on peut négliger la chute de pression associée à la dissipation visqueuse le long de celui-ci. Au contraire, il sera possible de calculer la chute de pression asssociée à l'accélération des particules fluides le par la formule de Bernoulli.

3.3.3 Traînée, sillage turbulent

Nous venons d'identifier un lieu de dissipation visqueuse qui contribue à la traînée (force de freinage) sur un objet en mouvement relatif par rapport au fluide. Lorsque $\mathcal{R}e \gg 1$, cette force de traînée est en général donnée sous la forme

$$F_t = C_x A \frac{1}{2} \rho V^2$$

où C_x est un coefficient aérodynamique sans dimension et A l'aire projetée de l'objet dans la direction du flux ($A = \pi R^2$ pour une sphère de rayon R.

Ne nous y-trompons pas, c'est bien la dissipation visqueuse qui est à l'œuvre, même si la viscosité n'apparaît pas dans cette formule ; en effet, le C_x dépend du $\mathcal{R}e$ donc de ν.

Pour un objet bien profilé, $C_x < 0.1$ mais pour une sphère ou, pire, une plaque perpendiculaire à l'écoulement, $C_x \simeq 1$. Que se passe-t-il ?

À l'arrière d'un tel objet se développe une zone — *sillage turbulent*— où les lignes de courant ne sont plus parallèles, même approximativement, où l'écoulement n'est plus stationnaire, où le champ de vitesse varie fortement sur une large gamme de distances, y-compris les petites échelles où la dissipation visqueuse est très importante. La chute de pression associée (comme dans un Poiseuille) est telle que la pression moyenne (elle fluctue beaucoup) dans cette zone est quasiment égale à la pression au repos. En revanche, à l'avant de l'obstacle, au voisinage du point d'arrêt, la pression est plus ́elevée de $1/2\rho V^2$ (Bernoulli). il n'est donc pas étonnant que l'on trouve $F_t \sim 1/2\rho V^2 A$.

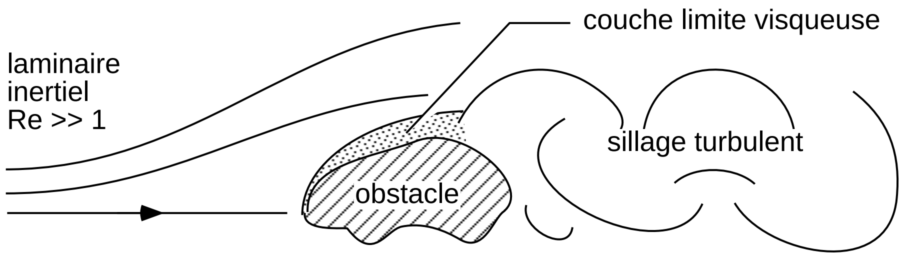

Figure 41: Les lieux de la dissipation visqueuse pour un écoulement à $\mathcal{R}e \gg 1$: couche limite et sillage turbulent.

L'apparition et l'extension du sillage sont donc nuisibles. On sait diminuer la taille du sillage pour un profil donné en retardant vers l'aval son apparition. L'idée est d'empécher la couche limite visqueuse de se décoller de l'obstacle. on y parvien en la rendant elle même turbulente (par opposition à laminaire). C'est le rôle de la rugosité des balles de golf, ou des petits obstacles visibles sur les ailes d'avion.

Pour en savoir plus, on consultera par exemple l'excellent ouvrage de E. Guyon *et al.*, "Hydrodynamique physique", intereditions, Editions du CNRS.